الدرس 1

# المُتَتالياتُ التراجِعيَةُ والبرهانُ بِالتراجُعِ

## 1 - عموميات حول المتتاليات

### 1 - 1 تعريف

المتتالية هي دالة $U$ معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

اصطلاحات :

- نرمز إلى صورة العدد الطبيعي $n$ بالرمز $U_n$ بدلا من $U(n)$ .
- نرمز إلى المتتالية بالرمز $(U_n)$ بدلا من $U$
- $U_n$ يدعى الحد العام للمتتالية $(U_n)$ أو الحد ذو الدليل $n$

ملاحظة

هناك طريقتان لتوليد متتالية :

1) تعيين متتالية بإعطاء العبارة الصريحة للحد العام .

2) تعيين متتالية بعلاقة تراجعية .



بكالوريا الجزائر
bac 15

مثال -

$(U_n)$ ، $(V_n)$ ، $(W_n)$ ثلاث متتاليات معرفة بـ :

$U_n = (-\frac{1}{2})^n$ ، $V_n = g(n)$ حيث $g: x \mapsto x^2+1$ و $W_{n+1} = 3W_n - 1$ مع $W_0 = 2$

- المتتاليتان $(U_n)$ و $(V_n)$ معرفتان بحديهما العام وأما للمتتالية $(W_n)$ فهي تراجعية.

## 1 - 2 اتجاه تغير متتالية

- القول ان المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما يعني أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1} > U_n$
- القول ان المتتالية $(U_n)$ متناقصة تماما يعني انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1} < U_n$
- القول ان المتتالية $(U_n)$ ثابتة يعني انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1} = U_n$

ملاحظة

بنفس الكيفية السابقة نعرف المتتالية المتزايدة او المتناقصة وذلك بتبديل المتباينة $U_{n+1} > U_n$ بـ $U_{n+1} \geq U_n$ (المتباينة $U_{n+1} < U_n$ بالمتباينة $U_{n+1} \leq U_n$)

مثال -

$(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بالعبارة $U_n = 3n+5$

و منه الحد $U_{n+1}$ معرف بـ $U_{n+1} = 3(n+1)+5 = 3n+8 = U_n + 3$

بما ان $3 > 0$ فإن $(U_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

## 1 - 3 المتتالية الحسابية

- القول ان المتتالية $(U_n)$ حسابية يعني انه يوجد عدد حقيقي $r$ بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_{n+1} = U_n + r$ ، يدعى $r$ اساس المتتالية $(U_n)$
- من اجل كل عددين طبيعيين $m$ و $P$ يكون $U_m = U_P + (m-p)r$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

- إذا كان $S = P + ..... + d$ هو مجموع $m$ حد لمتتابعة من متتالية حسابية فإن:

$$S = \frac{m}{2}(P+d)$$

مثال -

ليكن $S$ مجموع الأعداد الطبيعية المتتالية $1, 2, ......, n$

لاحظ ان $S$ هو مجموع $n$ حد اول لمتعاقبة من متتالية حسابية حدها الأول 1

وحدها الأخير $n$ و اساسها $r=1$ و منه فإن $S = \frac{n}{2}(1+n)$





## 1 - 4 المتتالية الهندسية

- القول ان $(U_n)$ متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي $q$ بحيث انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_{n+1} = q \times U_n$ ، ويدعى $q$ اساس المتتالية $(U_n)$
- من اجل كل عددين طبيعيين $m$ و $P$ يكون $U_m = U_p \times q^{m-p}$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

إذا كان $S = p + ..... + d$ هو مجموع $m$ حد المتتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول $p$ و اساسها $q$ فإن $S = p \times \frac{1-q^m}{1-q}$ حيث $(q \neq 1)$

مثال -

$S$ مجموع الأعداد الحقيقية المعرف بـ $S = 1 + q + ...... + q^{n-1}$

$S$ عبارة عن مجموع $n$ حد اول من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1

و اساسها $q$ إذن $S = \frac{1-q^n}{1-q}$

تمرين تدريبي ❶

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

1) عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج عبارة الحد العام $U_n$

2) نفرض ان $U_n \neq 0$ و نضع $V_n = \frac{1}{U_n}$

أ- بين ان المتتالية $(V_n)$ حسابية يطلب تعين حدها الأول و اساسها .

ب- استنتج عبارة $V_n$ ثم $U_n$ بدلالة $n$

✓ الحل :

1) $U_1 = \frac{U_0}{U_0+1} = \frac{1}{2}$ ، $U_2 = \frac{U_1}{U_1+1} = \frac{1}{3}$ ، $U_3 = \frac{U_2}{U_2+1} = \frac{1}{4}$ ، $U_4 = \frac{U_3}{U_3+1} = \frac{1}{5}$ ،

$U_5 = \frac{U_4}{U_4+1} = \frac{1}{6}$

نلاحظ ان الحدود الأولى لهذه المتتالية تكتب على الشكل $U_n = \frac{1}{n+1}$

2) أ) حتى تكون $(V_n)$ حسابية يجب ان يوجد عدد حقيقي $r$ بحيث من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $V_{n+1} - V_n = r$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = 1$$

ومنه $(V_n)$ متتالية حسابية اساسها $r=1$ و حدها الأول $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

ب) عبارة الحد العام $V_n$ هي $V_n = V_0 + n \times r$ بالتعويض نجد :

$V_n = 1+n$ و منه $U_n = \frac{1}{1+n}$

### تمرين تدريبي 2

- عين خمسة حدود موجبة من متتالية هندسية $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$ مع العلم ان $U_1 \times U_5 = 25$ و $U_2+U_3+U_4 = \frac{35}{2}$

✓ الحل :

$$U_1 \times U_5 = U_1 \times U_1 \times r^4 = (U_1 \times r^2)^2 = (U_3)^2$$

و بما ان $U_1 \times U_5 = 25$ فإن $U_3 = 5$

المساواة $U_2+U_3+U_4 = \frac{35}{2}$ تصبح $U_2+U_4 = \frac{25}{2}$

بما أن $U_3$ الوسط الهندسي لـ $U_2$ و $U_4$ فإن $U_2 \times U_4 = U_3^2 = 25$

إذن $\begin{cases} U_2 \times U_4 = 25 \\ U_2 + U_4 = \frac{25}{2} \end{cases} \quad .... (I)$

بعد حل الجملة $(I)$ نجد $U_1 = \frac{5}{4}$ ، $U_2 = \frac{5}{2}$ ، $U_3 = 5$ ، $U_4 = 10$ ، $U_5 = 20$



## 2 - البرهان بالتراجع

### 2 - 1 أهمية البرهان بالتراجع

في الرياضيات توجد بعض الخواص تتعلق بعدد طبيعي $n$ مثلا $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ نرمز إلى هذه الخاصية بـ $P_n$ .

- نستطيع القول ان $P_1$ صحيحة لأن $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$P_2$ صحيحة لأن $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$

$P_3$ صحيحة لأن $1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$





لكن هل $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$ ؟ إذا كان كذلك فكيف نبينه مع العلم انه لا يمكن التحقق من ذلك بالحساب لأن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ غير منتهية البرهان بالتراجع يسمح لنا باستنتاج صحة الخاصية $P_n$ من اجل كل $n \geq 1$ و بالتالي فهو وسيلة تسمح بالمرور من المنتهي إلى اللامنتهي .

### 2 - 2 مبدأ البرهان بالتراجع :

للبرهان على ان الخاصية $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نتبع خطوتين اساسيتين هما :

1) نتحقق أن $P_{n_0}$ صحيحة .

2) نفرض أن الخاصية $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ كيفي و على هذا الفرض نبين ان الخاصية $P_{n+1}$ صحيحة

إذا تحقق الشرطان السابقان معا نستنتج أن الخاصية $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

**ملاحظة**

- الفرضية " $P_n$ صحيحة " تسمى فرضية التراجع

### تمرين تدريبي 1

برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ اكبر من أو يساوي 1 يكون :

$$1^2+2^2+3^2+ \ .... \ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✓ الحل :

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي $P_n$ الخاصية

$$1^2+2^2+3^2+ \ .... \ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $P_1$ صحيحة لأن $1^2 = 1$ و $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

- نفرض أن $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي:

$$1^2+2^2+3^2+ \ .... \ +(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} .$$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + .... + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

لأن $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

إذن الخاصية $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فإن الخاصية $P_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$

## تمرين تدريبي 2

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ العدد $10^n-1$ يقبل القسمة على 9

### ✓ الحل

من أجل كل عدد طبيعي $n$ نسمي $P_n$ الخاصية "العدد $10^n-1$ يقبل القسمة على 9"

- بما أن $10^0-1=0$ و الصفر يقبل القسمة على 9 فإن $P_0$ صحيحة.
- نفرض أن $P_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $n\geq 0$ أي $10^n-1=9k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

و نبرهن أن $P_{n+1}$ صحيحة أي $10^{n+1}-1=9k'$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب:

$$10^{n+1}-1 = 10^n\times 10-1 = 10^n(1+9)-1 = (10^n-1)+9\times 10^n$$
$$=9k+9\times 10^n = 9(k+10^n)=9k'$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة وعليه فإن الخاصية $P_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

## تمرين تدريبي 3

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون $2^n > n$.

### ✓ الحل:

- $P_1$ صحيحة لأن $2^1>1$
- نفرض أن $P_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $n\geq 1$ أي $2^n>n$ و نبرهن أن $P_{n+1}$ صحيحة أي $2^{n+1}>n+1$.

بضرب طرفي المتباينة $2^n>n$ بالعدد 2 نجد $2^{n+1}>2n$ ... (1)

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $2n\geq n+1$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $2^{n+1}>n+1$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة وعليه فإن الخاصية $P_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.





# تطبيقات نموذجية

## تطبيق 1 . دراسة اتجاه تغير متتالية

- ما هي المتتاليات الرتيبة من بين المتتاليات المعطاة؟

أ) $U_n=3n+5$ ، جـ) $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots +\frac{1}{2^n}-n$

ب) $U_n=n!$ ، د) $U_{n+1}=\frac{3}{5}U_n+4$ و $U_0=7$

### ✓ الحل:

لمعرفة اتجاه تغير متتالية نعين إشارة المقدار $U_{n+1}-U_n$

أ) $U_{n+1}-U_n=[3(n+1)+5]-(3n+5)=3$

بما أن من كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_{n+1}-U_n>0$ فإن $(U_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) $n!=n(n-1)\times \dots \times 2\times 1$ مع $n\geq 1$

$$U_{n+1}-U_n = (n+1)\,n\,(n-1)\times \dots \times 2\times 1 - n(n-1)\times \dots \times 2\times 1$$
$$= n(n-1)\times \dots \times 2\times 1\,[n+1-1] = (n!)\times n$$

بما أن $n!>0$ و $n\geq 1$ فإن $(n!)\times n>0$ و بالتالي المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

جـ) $$U_{n+1}-U_n=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots +\frac{1}{2^{n+1}}-n-1\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots +\frac{1}{2^n}-n\right] = \frac{1}{2^{n+1}}-1$$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $2^{n+1}>2^0$ بقلب طرفي المتباينة نجد $\frac{1}{2^{n+1}}<1$

و بطرح 1 من طرفي هذه الأخيرة نجد $\frac{1}{2^{n+1}}-1<0$ أي $U_{n+1}-U_n<0$

بالتالي $(U_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

د) $U_{n+1}-U_n = \frac{3}{5}U_n+4-U_n = -\frac{2}{5}U_n+4 = -\frac{2}{5}(U_n-10)$

لمعرفة إشارة $U_{n+1}-U_n$ لابد من معرفة إشارة $U_n-10$.

من أجل $n=0$ نجد $U_0-10<0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n>0$ صحيحة من أجل $n=0$.

هل الخاصية $U_n-10<0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي؟ للإجابة عن ذلك نستعمل البرهان بالتراجع:

نسمي $P_n$ الخاصية $U_n-10<0$

- $P_0$ صحيحة لأن $U_0-10<0$

- نفرض أن $P_n$ صحيحة أي $U_n-10<0$ و نبرهن أن $P_{n+1}$ صحيحة أي $U_{n+1}-10<0$

$$U_{n+1}-10=\frac{3}{5}U_n+4-10=\frac{3}{5}U_n-6=\frac{3}{5}(U_n-10)$$

بما ان $U_n-10<0$ فإن $\frac{3}{5}(U_n-10)<0$ و عليه فإن $U_{n+1}-10<0$ إذن $P_{n+1}$ صحيحة و بالتالي الخاصية $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي و عليه فالمتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما على $I\!N$ .

## تطبيق . 2 دراسة رتابة متتالية

نعرف من اجل كل عدد طبيعي $n$ المتتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ كما يلي :

$$V_n=U_{2n}-U_n \quad \text{و} \quad U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ ....\ +\frac{1}{n}$$

برهن ان المتتالية $(V_n)$ متزايدة تماما على $I\!N$

**✓ الحل :**

لكي تكون المتتالية $(V_n)$ متزايدة تماما على $I\!N$ يجب ان يكون $V_{n+1}-V_n>0$ من اجل كل عدد طبيعي $n$ .

$$V_{n+1}-V_n=(U_{2n+2}-U_{n+1})-(U_{2n}-U_n)=(U_{2n+2}-U_{2n})-(U_{n+1}-U_n)$$

$$=\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

بما ان $\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}>0$ فإن $V_{n+1}-V_n>0$ و بالتالي المتتالية $(V_n)$ متزايدة تماما على $I\!N$

## تطبيق . 3 حساب مجموع متتالية هندسية

$(U_n)$ متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول $U_1=-2$

1) عبر عن $U_n$ بدلالة $n$

2) احسب $U_1+U_2+\ ...\ +U_7$

3) لتكن $(V_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بالعبارة ، $V_n=U_{2n}$ احسب المجموع $V_1+V_2+\ ....\ +V_n$ بدلالة $n$ .





**✓ الحل**

1) $U_n=U_1\times q^{n-1}$ حيث $q$ هو الأساس و $U_1$ الحد الأول

بتعويض قيمة $q$ و $U_1$ في عبارة $U_n$ نجد $U_n=-2\times 5^{n-1}$

2) $$U_1+U_2+\ ....\ +U_7=U_1\times\frac{1-q^7}{1-q}=-2\times\frac{1-5^7}{1-5}=\frac{1-5^7}{2}$$

3) $$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}=\frac{-2\times 5^{2n+2-1}}{-2\times 5^{2n-1}}=5^2=25$$

إذن $(V_n)$ متتالية هندسية اساسها $q'=q^2$ و حدها الأول $V_1=U_2$ و منه

$$V_1+V_2+\ ...\ +V_n=V_1\times\frac{1-q'^n}{1-q'}=U_2\times\frac{1-(q^2)^n}{1-q^2}=U_2\times\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$$

$$=-10\times\frac{1-5^{2n}}{1-25}=\frac{5}{12}\left(1-5^{2n}\right)$$

## تطبيق . 4 تعيين أساس متتالية هندسية

$(U_n)$ متتالية معرفة على $I\!N^*$ بحيث من احل كل عدد طبيعي غير معدوم ،

$$\sum_{P=1}^{n}U_P=\frac{3^n-1}{2}$$

1) احسب $U_4+U_5+U_6+U_7+U_8+U_9$

2) بين ان $(U_n)$ متتالية هندسية يطلب تعين اساسها و حدها الأول $U_1$ .

**✓ الحل :**

1) $$S_1=U_1+U_2+U_3=\frac{3^3-1}{2}=13$$

$$S_2=U_1+U_2+\ .....\ U_9=\frac{3^9-1}{2}=9841$$

$$S_2-S_1=U_4+U_5+\ ....\ +U_9=9841-13=9828$$

2) $$(1)\ ....\ U_1+U_2+\ ...\ +U_{n-1}=\frac{3^{n-1}-1}{2}$$

$$(2)\ ....\ U_1+U_2+\ ...\ +U_n=\frac{3^n-1}{2}$$

بطرح طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $U_n=\frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}-1}{2}=\frac{3^n}{2}-\frac{3^{n-1}}{2}=3^{n-1}$

بما ان $(U_n)$ معرفة على $I\!N^*$ فان حدها الأول هو $U_1=3^{1-1}=1$ و اساسها $r=3$ .

## تطبيق . 5 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

$(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ كما يلي:
$U_1 = 1$ و $U_2 = 3$ و $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$
1) من اجل $n \geq 1$ نضع $V_n = U_{n+1} - U_n$
أ) ما هي طبيعة للتتالية $(V_n)$ ؟
ب) استنتج عبارة $V_n$ بدلالة $n$ .
2) بين بالتراجع ان $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^{n} V_r$ ثم استنتج عبارة $U_n$ بدلالة $n$ .

**✓ الحل :**

1) أ) $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = 3U_{n+1} - 2U_n - U_{n+1}$
$= 2U_{n+1} - 2U_n = 2(U_{n+1} - U_n) = 2V_n$

ومنه $(V_n)$ متتالية هندسية اساسها $q = 2$ و حدها الأول $V_1 = U_2 - U_1 = 2$

ب) $V_n = V_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

2) نسمي $P_n$ الخاصية $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^{n} V_r$

$P_1$ صحيحة لان $U_2 - U_1 = 3 - 1 = 2$ و $\sum_{r=1}^{1} V_r = V_1 = 2$

- نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ اي $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^{n} V_r$

و نبرهن ان $P_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+2} - U_1 = \sum_{r=1}^{n+1} V_r$

$$U_{n+2} - U_1 = 3U_{n+1} - 2U_n - U_1 = 2(U_{n+1} - U_n) + U_{n+1} - U_1$$
$$= 2V_n + \sum_{r=1}^{n} V_r = V_{n+1} + \sum_{r=1}^{n} V_r = \sum_{r=1}^{n+1} V_r$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فإن $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

- لدينا $U_n - U_1 = \sum_{r=1}^{n-1} V_r$

و منه $U_n = U_1 + \sum_{r=1}^{n-1} V_r$

$$U_n = U_1 + V_1 \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = 1 + 2 \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = -1 + 2^n$$





## تطبيق . 6 تعيين اساس متتالية هندسية

نعتبر $(U_n)$ متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل عدد طبيعي اكبر من او يساوي الواحد بالعلاقة $U_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} U_n$ و $U_1 = a$ مع $a$ عدد حقيقي معطى ، و لتكن $(V_n)$ متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من اجل كل طبيعي $n \geq 1$ بـ $V_n = 13U_n - 4$
1) بين ان $(V_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها $k$
2) اكتب $V_n$ بدلالة $n$ و $a$ ثم استنتج $U_n$ بدلالة $n$ و $a$

**✓ الحل :**

1) $V_{n+1} = 13U_{n+1} - 4 = 13 \times \frac{4}{10} - 13 \frac{\times 3}{10} U_n - 4 = \frac{26}{5} - \frac{39}{10}\left(\frac{V_n + 4}{13}\right) - 4$
$= \frac{26}{5} - \frac{3}{10}(V_n + 4) - 4 = \frac{26}{5} - \frac{12}{10} - \frac{3}{10} V_n - 4 = -\frac{3}{4} V_n$

إذن $(V_n)$ متتالية هندسية اساسها $k = \frac{-3}{10}$ و حدها الأول $V_1 = 13U_1 - 4 = 13a - 4$

2) $V_n = V_1 \times k^{n-1} = (13a - 4) \times \left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$

$$U_n = \frac{V_n + 4}{13} = \frac{(13a - 4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + 4}{13}$$

## تطبيق . 7 متتالية كثير حدود . المتتالية الهندسية

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = a$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + n^2 + n \quad ....(1)$
1) اوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $P(x)$ بحيث المتتالية $(a_n)$ ذات الحد العام $a_n = P(n)$ تحقق العلاقة (1)
2) بين أن المتتالية $(V_n)$ ذات الحد العام $V_n = U_n - a_n$ هندسية.
3) اكتب $V_n$ ثم $U_n$ بدلالة $n$ و $a$

**✓ الحل :**

1) $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta$ حيث $\alpha = 0$

إذن $a_n=\alpha n^2+\beta n+\delta$ ، $(a_n)$ تحقق العلاقة (1) وهذا معناه ان :

$$\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\delta=\frac{1}{2}\alpha n^2+\frac{1}{2}\beta n+\frac{1}{2}\delta+n^2+n$$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$$\left(\frac{1}{2}\alpha-1\right)n^2+\left(2\alpha+\frac{1}{2}\beta-1\right)n+\alpha+\beta+\delta-\frac{1}{2}\delta=0 \quad ............ \quad (2)$$

المساواة (2) محققة من اجل كل عدد طبيعي إذا فقط إذا كان :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha-1=0\\ 2\alpha+\frac{1}{2}\beta-1=0\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\delta=0\end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نجد $\alpha=0$ و $\beta=-6$ و $\delta=8$

إذن $P(x)=2x^2-6x+8$

2) $V_{n+1}=U_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n^2+n-2(n+1)^2+6(n+1)-8$

$$=\frac{1}{2}(U_n-2n^2+6n-8)=\frac{1}{2}\left[U_n-(2n^2-6n+8)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(U_n-a_n)=\frac{1}{2}V_n$$

إذن $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0=U_0-a_0=a-8$

3) $V_n=V_0\times q^n=(a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$U_n=V_n+a_n=(a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n^2-6n+8$$

## تطبيق . 8 تعيين ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

$a$ , $b$ , $c$ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث $abc=64$

و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{8}$ عين الأعداد الحقيقية $a$ , $b$ , $c$

✓ الحل :

بما أن $a$ , $b$ , $c$ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فان $ac=b^2$

$$\begin{cases}abc=64\\ ac=b^2\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}b^3=64\\ ac=b^2\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}b=4\\ ac=16\end{cases}$$





بتعويض قيمة $b$ في المساواة $\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ نجد $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}$

إذن (1) ........ $\begin{cases}ac=16\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}\end{cases}$

(1) تكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{16}{a}}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{1}{a}+\frac{a}{16}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{16+a^2}{16a}=\frac{5}{8}\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{16+a^2}{2a}=5\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ a^2-10a+16=0\end{cases}$

$a^2-10a+16=0$

$\Delta'=25-(1)(16)=9$ و منه $a_1=8$ و $a_2=2$

$a=a_1$ يكافئ $c_1=\frac{16}{8}=2$ منه $(a,b,c)=(8,4,2)$

$a=a_2$ يكافئ $c_2=\frac{16}{2}=8$ منه $(a,b,c)=(2,4,8)$

## تطبيق . 9 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ :

$S_n=1\times2+2\times3+....+n(n+1)$ و $T_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

. برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $S_n=T_n$

✓ الحل :

نسمي $P_n$ الخاصية " $S_n=T_n$ "

• $P_1$ صحيحة لأن $S_1=1\times2=2$ و $T_1=\frac{1}{3}\times1(1+1)(1+2)=2$

- نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ أي $S_n=T_n$ و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي $S_{n+1}=T_{n+1}$

$$S_{n+1}=1\times2+2\times3+...+(n+1)(n+2)$$

$$=1\times2+2\times3+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$

$$=S_n+(n+1)(n+2)=T_n+(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{3}\, n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) = T_{n+1}$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فإن الخاصية $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

## تطبيق . 10 البرهان بالتراجع و إثبات متباينة

من أجل كل عدد طبيعي $n$ نسمي $P_n$ الخاصية $3^n \ge (n+2)^2$

1) هل $P_0$ ، $P_1$ ، $P_2$ ، $P_3$ صحيحة ؟

2) بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 3$ ، $P_n$ صحيحة .

### ✓ الحل :

1) بما أن $3^0 = 1$ و $(0+2)^2 = 4$ فإن المتباينة $1 \ge 4$ خاطئة و بالتالي $P_0$ خاطئة .

- بما ان $3^1 = 3$ و $(1+2)^2 = 9$ و المتباينة $3 \ge 9$ خاطئة فإن $P_1$ خاطئة
- بما ان $3^2 = 9$ و $(2+2)^2 = 16$ و المتباينة $9 \ge 16$ خاطئة فإن $P_2$ خاطئة
- بما ان $3^3 = 27$ و $(3+2)^2 = 25$ و المتباينة $27 \ge 25$ صحيحة و بالتالي $P_3$ صحيحة

2) $P_3$ صحيحة من السؤال 1 .

- نفرض أن $P_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $n$ اي $3^n \ge (n+2)^2$ و نبرهن أن $P_{n+1}$ صحيحة اي $3^{n+1} \ge (n+3)^2$ .

بضرب المتباينة $3^n \ge (n+2)^2$ بالعدد 3 نجد $3^{n+1} \ge 3(n+2)^2$ ... (1)

لكي تكون $P_{n+1}$ صحيحة يجب ان يكون $3(n+2)^2 \ge (n+3)^2$ .... (2)

(2) تكافئ $3(n+2)^2 - (n+3)^2 \ge 0$ تكافئ $2n^2 + 6n + 3 \ge 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-6-\sqrt{12}}{4}$ | | $\frac{-6+\sqrt{12}}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2+6x+3$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

من الجدول نستنتج ان $2n^2 + 6n + 3 \ge 0$ من أجل كل عدد طبيعي و بالتالي المتباينة (2) صحيحة إذن من (1) و (2) نستنتج ان $3^{n+1} \ge (n+3)^2$ و عليه فالخاصية $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 3$ .





## تطبيق . 11 البرهان بالتراجع و إثبات متباينة

نضع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ حيث $n \ge 1$ و يقرأ " $n$ عاملي "

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n! \ge 2^{n-1}$

### ✓ الحل

نسمي $P_n$ الخاصية " $n! \ge 2^{n-1}$ "

- $P_1$ صحيحة لأن $1! = 1$ و $2^{1-1} = 2^0 = 1$ و المتباينة $1 \ge 1$ صحيحة .
- نفرض أن $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ اي $n! \ge 2^{n-1}$

و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي $(n+1)! \ge 2^n$

بضرب طرفي المتباينة $n! \ge 2^{n-1}$ بالعدد $(n+1)$ نجد $(n+1) \times (n!) \ge (n+1)2^{n-1}$ لكن $(n+1) \times (n!) = (n+1)!$ و عليه المتباينة الأخيرة تصبح

$(n+1)! \ge (n+1) \times 2^{n-1}$ .... (1)

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n+1 \ge 2$

بضرب طرفي المتباينة $n+1 \ge 2$ بالعدد $2^{n-1}$ نجد $(n+1)2^{n-1} \ge 2^n$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $(n+1)! \ge 2^n$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و بالتالي الخاصية $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

## تطبيق . 12 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون العدد $5^{2n+1} - 5$ يقبل القسمة على 6 .

### ✓ الحل

نسمي $P_n$ الخاصية " $5^{2n+1} - 5$ يقبل القسمة على 6 ".

- $P_0$ صحيحة لأن $5^{0+1} - 5 = 0$ و الصفر يقبل القسمة على 6.
- نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ اي $5^{2n+1} - 5 = 6\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$ و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي $5^{2n+3} - 5 = 6\beta$ مع $\beta \in \mathbb{N}$

$$5^{2n+3} - 5 = 5^{2n+1} \times 5^2 - 5 = 5^{2n+1}(24+1) - 5 = 5^{2n+1} - 5 + 24 \times 5^{2n+1}$$

$$= 6\alpha + 24 \times 5^{2n+1} = 6(\alpha + 4 \times 5^{2n+1}) = 6\beta$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و بالتالي $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

## تطبيق . 13 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن على صحة الخاصية $P_n$ ؛ " $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 " من اجل كل عدد طبيعي $n$

✓ الحل

- $P_0$ صحيحة لان $2^{0+2} + 3^{0+1} = 7$ و 7 مضاعف للعدد 7.
- نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ اي $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي " $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ مضاعف للعدد 7 "

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2^1$$
$$= 2^{2n+1} \times (7+2) + 2^{n+2} \times 2$$
$$= 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right)$$
$$= 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 7\alpha$$
$$= 7\left(3^{2n+1} + 2\alpha\right) = 7\beta$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فان $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي.

## تطبيق . 14 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين طبيعيين غير معدومين بحيث $\alpha \neq \beta$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون $\alpha^n - \beta^n$ يقبل القسمة على $\alpha - \beta$ .

2) استنتج أن $6^{3n+3} - 7^{n+1}$ يقبل القسمة على 209 .

✓ الحل

1) نسمي $P_n$ الخاصية " $\alpha^n - \beta^n$ يقبل القسمة على $\alpha - \beta$ "

- $P_0$ صحيحة لأن $\alpha^0 - \beta^0 = 0$ و 0 يقبل القسمة على $\alpha - \beta$
- نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n$ اي $\alpha^n - \beta^n = \lambda(\alpha - \beta)$ و

نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي $\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = \lambda'(\alpha - \beta)$

$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \beta\alpha^n - \beta\alpha^n = \left(\alpha^{n+1} - \beta\alpha^n\right) + \left(-\beta^{n+1} + \beta\alpha^n\right)$$
$$= \alpha^n(\alpha - \beta) + \beta\left(\alpha^n - \beta^n\right) = \alpha^n(\alpha - \beta) + \beta \times \lambda(\alpha - \beta)$$
$$= (\alpha - \beta)\left(\alpha^n + \beta\lambda\right) = (\alpha - \beta) \times \lambda'$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فإن $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .





2) $6^{3n+3} - 7^{n+1} = \left(6^3\right)^{n+1} - 7^{n+1} = 216^{n+1} - 7^{n+1}$

من السؤال(1) نستنتج ان $216^{n+1} - 7^{n+1}$ يقبل القسمة على $216 - 7$ اي يقبل القسمة على 209 .

## تطبيق . 15 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي $a \geq 1$ يكون العدد $a\left(a^{2n} - 1\right)$ قابلا القسمة على 6 .

✓ الحل

نسمي $P_n$ الخاصية $a\left(a^{2n} - 1\right)$ يقبل القسمة على 6 .

نضع $\alpha_{(a,n)} = a\left(a^{2n} - 1\right)$

1) من اجل $n = 1$ يكون $\alpha_{(a,1)} = a\left(a^2 - 1\right)$

نبرهن بالتراجع ان العدد $\alpha_{(a,1)}$ يقبل القسمة على 6 .

- نسمي $q_a$ الخاصية $\alpha_{(a,1)}$ يقبل القسمة على 6 .
- $q_1$ صحيحة لأن $\alpha_{(1,1)} = 0$ و الصفر يقبل القسمة على 6 .
- نفرض ان $q_a$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي اي $\alpha_{(a,1)} = 6\lambda$ و نبرهن صحة $q_{a+1}$ اي $\alpha_{(a+1,1)} = 6\lambda'$

$$\alpha_{(a+1,1)} = (a+1)\left((a+1)^2 - 1\right) = (a+1)\left(a^2 - 1 + 2a + 1\right)$$
$$= a\left(a^2 - 1\right) + \left(a^2 - 1\right) + (a+1)(2a+1) = 6\lambda + (a+1)(3a)$$

لاحظ ان العدد $a(a+1)$ زوجي، وبالتالي فالعدد $3a(a+1)$ يقبل القسمة على 6 .

إذن $\left(\alpha_{a+1,1}\right) = 6\lambda + 6k = 6(\lambda + k) = 6\lambda'$

منه $q_{a+1}$ صحيحة و بالتالي $q_a$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

و عليه فإن $P_1$ صحيحة .

2) نفرض ان $P_n$ صحيحة اي $a\left(a^{2n} - 1\right) = 6\beta$

و نبرهن صحة $P_{n+1}$ صحيحة اي $a\left(a^{2n+2} - 1\right) = 6\beta'$

$$a\left(a^{2n+2} - 1\right) = a\left[a^{2n+2} - 1 + a^2 - a^2\right]$$
$$= a\left[a^2\left(a^{2n} - 1\right) + \left(a^2 - 1\right)\right]$$
$$= a^2 a\left(a^{2n} - 1\right) + a\left(a^2 - 1\right)$$
$$= a^2 \times 6\beta + 6\lambda = 6\left(a^2\beta + \lambda\right) = 6\beta'$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ و من اجل كل $a \geq 1$ .

## تطبيق 16 . البرهان بالتراجع و إثبات متباينة مزدوجة

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $0<U_n<2$

2) بين ان المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما .

### ✓ الحل

1) نسمي $P_n$ الخاصية $0<U_n<2$

- $P_0$ صحيحة لأن $0<U_0<2$

- نفرض أن $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n$ اي $0<U_n<2$

و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي $0<U_{n+1}<2$.

بإضافة 2 إلى حدود المتباينة $0<U_n<2$ نتحصل على $2<U_n+2<4$

و بجذر حدود هذه الأخيرة نجد $0<\sqrt{2}<\sqrt{2+U_n}<2$ اي $0<U_{n+1}<2$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة وعليه فإن $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

2) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{2+U_n}-U_n=\frac{2+U_n-U_n^2}{\sqrt{2+U_n}+U_n}=\frac{(U_n-2)(-U_n-1)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$

بما ان $0<U_n<2$ فإن $-U_n-1<0$ و $U_n-2<0$

و بالتالي $\frac{(U_n-2)(-U_n-1)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}>0$

إذن $(U_n)$ متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ .

## تطبيق 17 . البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يوجد عددان طبيعيان $a_n$ و $b_n$ بحيث $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$

### ✓ الحل :

نسمي $P_n$ الخاصية $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$

. $P_1$ صحيحة لأن $(2+\sqrt{3})^1=a_1+b_1\sqrt{3}$ حيث $a_1=2$ و $b_1=1$





. نفرض أن $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n$ اي

$$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\times\sqrt{3} \quad ❶$$

و نبرهن ان $P_{n+1}$ صحيحة اي $(2+\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\times\sqrt{3}$ .

بضرب طرفي المساواة (1) بالعدد $2+\sqrt{3}$ نجد:

$$(2+\sqrt{3})^{n+1}=(a_n+b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$$(2+\sqrt{3})^{n+1}=(2a_n+3b_n)+\sqrt{3}(2b_n+a_n) \quad ❷$$

بوضع $a_{n+1}=2a_n+3b_n$ و $b_{n+1}=2b_n+a_n$

المساواة (2) تصبح :

$$(2+\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}$$

و بما ان $a_n$ و $b_n$ عددان طبيعيان فإن $a_{n+1}$ و $b_{n+1}$ عددان طبيعيان.

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فإن $P_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

## تطبيق 18 . إثبات بالتراجع صحة تخمين

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_1=2$ و $U_{n+1}=\frac{2U_n-1}{U_n}$ .

1) احسب $U_2$ ، $U_3$ ، $U_4$ ضع النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال

2) خمن نتيجة عبارة الحد العام $U_n$ .

3) برهن بالتراجع صحة التخمين المحصل عليه

### ✓ الحل :

1) $U_2=\frac{2U_1-1}{U_1}=\frac{3}{2}$ و $U_3=\frac{2U_2-1}{U_2}=\frac{4}{3}$ و أيضا $U_4=\frac{2U_3-1}{U_3}=\frac{5}{4}$

2) نلاحظ ان البسط و المقام عددان طبيعيان متتابعان اذن يمكن كتابة $U_n=\frac{n+1}{n}$

3) نسمي $P_n$ الخاصية $U_n=\frac{n+1}{n}$ .

. $P_1$ صحيحة لأن $U_1=\frac{2}{1}=\frac{1+1}{1}$

. نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي اي $U_n=\frac{n+1}{n}$

و نبرهن ان $P_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$

$$U_{n+1} = \frac{2U_n-1}{U_n} = \frac{2\left(\frac{n+1}{n}\right)-1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{2n+2-n}{n}\times\frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n}\times\frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و منه نستنتج ان $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم

## تطبيق . 19 تخمين عبارة حد عام لمتتالية و إثبات صحته بالتراجع

$(U_n)$ متتالية معرفة $\mathbb{N}$ ب $U_0=2$ و $U_{n+1}=2U_n-3$

1) احسب $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ ، $U_4$ ، $U_5$ .

2) خمن عبارة الحد العام $U_n$ ثم برهن على صحتها

3) بحساب $U_n-3$ من اجل كل $n\geq 0$ عبر عن $U_n$ بدلالة $n$ (طريقة ثانية)

### ✓ الحل

1) $U_1=2U_0-3=1$ ، $U_2=2U_1-3=-1$ ، $U_3=2U_2-3=-5$

$U_4=2U_3-3=-13$ ، $U_5=2U_4-3=-29$

2) يمكن كتابة

$U_1=-2^1+3$ ، $U_2=-2^2+3$ ، $U_3=-2^3+3$ ، $U_4=-2^4+3$

و $U_5=-2^5+3$

و بالتالي يمكن كتابة $U_n$ على الشكل $U_n=-2^n+3$

- نسمي $P_n$ الخاصية $U_n=-2^n+3$

- $P_0$ صحيحة لأن $U_0=2=-2^0+3$ .

- نفرض أن $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n$ اي $U_n=-2^n+3$

و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي $U_{n+1}=-2^{n+1}+3$ .

$U_{n+1}=2U_n-3=2(-2^n+3)-3=-2^{n+1}+3$

منه $P_{n+1}$ صحيحة و بالتالي $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

3) $U_0-3=2-3=-1=-2^0$

$U_1-3=1-3=-2=-2^1$

$U_2-3=-1-3=-4=-2^2$

$U_3-3=-5-3=-8=-2^3$

$U_4-3=-13-3=-16=-2^4$

نلاحظ ان $U_n-3$ تكتب على الشكل : $-2^n$ اي $U_n=-2^n+3$ ( يمكنك إثبات ذلك بالتراجع )





## تطبيق . 20 تخمين عبارة حد عام لمتتالية و إثبات صحته بالتراجع

$(Q_n)$ متتالية كثيرة حدود معرفة من اجل كل عدد حقيقي $x$ ب $Q_0(x)=1$

و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ومن اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا

$Q_{n+1}(x)=xQ_n(x+1)$

1) اوجد $Q_1(x)$ ، $Q_2(x)$ و $Q_3(x)$ بدلالة $x$

2) خمن كتابة $Q_n(x)$ على شكل جداء عوامل.

3) برهن صحة هذا التخمين .

### ✓ الحل

1) $Q_1(x) = xQ_0(x+1) = x\times 1 = x$

$Q_2(x) = xQ_1(x+1) = x(1+x)$

$Q_3(x) = xQ_2(x+1) = x(1+x)(x+2)$

2) من عبارات $Q_1(x)$ ، $Q_2(x)$ ، $Q_3(x)$ نستنتج انه يمكن كتابة

$Q_n(x) = (x+0)(x+1)\times(x+2)\ \dots\ \times(x+n-1)$

3) نسمي $P_n$ الخاصية " $Q_n(x) = x(x+1)\times\dots\times(x+n-1)$ "

- $P_1$ صحيحة لأن $Q_1(x) = (x+0) = x$

- نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي غير معدوم اي

$Q_n(x) = x(x+1)\times\dots\times(x+n-1)$

و نبرهن ان $P_{n+1}$ صحيحة اي ؛

$Q_{n+1}(x) = x(x+1)\times\dots\times(x+n)$

$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x+1) = x\times(x+1)(x+2)\times\dots\times(x+1+n-1)$

$= x\times(x+1)(x+2)\times\dots\times(x+n)$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فإن $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

## تطبيق . 21 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

$\theta$ عدد حقيقي من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $(U_n)$ متتالية معرفة ب

$U_0=2\cos\theta$ ومن اجل كل عدد طبيعي $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$ .

1) احسب $U_1$ و $U_2$ .

2) بين بالتراجع انه من اجل عدد طبيعي $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$

✓ الحل

1) $U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2+(1+\cos\theta)}$

$$=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

بما ان $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ و بالتالي $\cos\frac{\theta}{2}>0$

إذن $U_1=2\cos\frac{\theta}{2}$

$$U_2=\sqrt{2+U_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{4}$$

2) نسمي $P_n$ الخاصية $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$

$P_0$ صحيحة لأن $U_0=2\cos\theta=2\cos\frac{\theta}{2^0}$

- نفرض أن $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n$ اي $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ و نبرهن صحة $P_{n+1}$ اي $U_{n+1}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}}=2\left|\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\right|$$

بما ان $\frac{\theta}{2^{n+1}}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}>0$ و بالتالي $U_{n+1}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة و عليه فإن $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي.





## تمارين و مسائل

**1** - $(V_n)$ متتالية معرفة بـ $V_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي $V_{n+1}=3V_n-1$

احسب $V_2$ ثم عبر عن $V_{n+2}$ بدلالة $V_n$.

**2** - $(U_n)$ متتالية عبارة حدها العام $U_n=\frac{n}{n^2+4}$.

عبر عن $U_{n+1}$ ، $U_{n-3}$ و $U_{2n}$ بدلالة $n$.

**3** - عين المتتالية الرتيبة من بين المتتاليات التالية :

1) $U_n=-2n+1$ ، 2) $U_n=\frac{n+2}{n+3}$

3) $U_n=n!$ ، 4) $U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

5) $U_0=4$ و $U_{n+1}=\frac{5}{6}U_n+2$.

**4** - من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $U_n=\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{-1}{n^2}$

ادرس رتابة المتتاليات التالية $(U_n)$ ، $(V_n)$ ، $(U_n+V_n)$ ، $(U_n\times V_n)$

**5** - نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة على $IN$ بـ $U_0=2$ و $U_1=4$ و $U_{n+1}=4U_n-U_{n-1}$

1) اوجد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث $\begin{cases}a+b=4\\ab=1\end{cases}$

2) $(V_n)$ متتالية بحيث $V_n=U_{n+1}-aU_n$ مع $n\in IN$

بين ان $(V_n)$ هندسية اساسها $b$.

3) $(W_n)$ متتالية بحيث $W_n=U_{n+1}-bU_n$ مع $n\in IN$

بين ان المتتالية $(W_n)$ هندسية اساسها $a$.

4) اعط عبارة صريحة لـ $V_n$ و $W_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $U_n$ بدلالة $n$.

**6** - $a$ ، $b$ ، $c$ ثلاثة اعداد حقيقية مختلفة و $a\neq 0$ ، بحيث $a$ ، $b$ ، $c$ بهذا الترتيب

حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $q$ و $3a$ ، $2b$ ، $c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية. احسب $q$ .

**7** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وبحيث انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون

$\sum_{P=1}^{n} U_P = 2n^2+7n$ بين ان $(U_n)$ متتالية حسابية معينا أساسها .

**8** - $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_0$ و علاقة تراجعية $U_{n+1}=\frac{U_n}{1+3U_n}$

1) احسب الأربعة الحدود الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج مقلوب كل منها ماذا تلاحظ؟

2) باستعمال المتتالية $(V_n)$ حيث $V_n=\frac{1}{U_n}$ اوجد عبارة $U_n$ بدلالة $n$ .

**9** - نريد حفر بئر تكلفة المتر الأول هي $1000\ DA$ و كلما تعمقنا في الحفر تزداد تكلفة المتر الواحد بمقدار ثابت هو $1500\ DA$ .

1) ما هي تكلفة البئر إذا حفرنا 30 متر؟

2) ما هو العمق الذي نصل إليه إذا كانت لدينا ميزانية $16000\ DA$ ؟

**10** - $(U_n)$ متتالية هندسية بحيث $U_1+U_2+U_3=465$ ، $U_1\times U_2\times U_3=421875$

. احسب $U_5$ .

**11** - 1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم،

$$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2) من اجل كل عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2 نضع

$$S_n=1+2\times 2+3\times 2^2+\dots+(n-1)\times 2^{n-2}$$

برهن بالتراجع انه من اجل كل $n\ge 2$ يكون $S_n=(n-1)2^n-n\times 2^{n-1}+1$

3) $a$ عدد حقيقي موجب تماما .

- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم $(1+a)^n\ge 1+na$

**12** - برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون :

1) $2\times 6\times 10\times\dots\times(4n-2)=(n+1)(n+2)\dots(2n)$

2) $14n^3+9n^2+n$ يقبل القسمة على 6.

3) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 .





**13** - 1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $5+4\times 2^{2n}$ يقبل القسمة على 3 .

2) نضع $L_n=2^{2n}\left[\left(2^{2n+1}-1\right)-1\right]$

أ) بين ان $L_{n+1}-16L_n=3Q_n$ حيث $Q_n=5+4\times 2^{2n}$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $L_n$ يقبل القسمة على 9.

**14** - $a$ طول القطعة $[AB]$ و لتكن $M_1$ منتصف $[AB]$ ، $M_2$ منتصف $[BM_1]$ ، $M_3$ منتصف $[M_1M_2]$ ، $M_n$ منتصف القطعة $[M_{n-2}M_{n-1}]$

بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $AM_n=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^r a}{2^r}+a$

**15** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n+1}{U_n+3}$

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $1\ge U_n\ge 0$

2) بين ان المتتالية $(U_n)$ متزايدة .

**16** - $x$ عدد حقيقي، نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$

$$C_n=\cos x+\cos 3x+\dots+\cos(2n-1)x$$

1) بين ان $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ و $\sin 2a=2\sin a\cos a$

2) حول العبارتين التاليتين إلى مجاميع $\sin(nx)\cos(nx)$ و $\sin x\cos(2n+1)x$

3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ و من اجل كل عدد حقيقي $x$

$x\ne k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ لدينا $C_n=\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{\sin x}$

**17** - برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$

$$\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2^2}\tan\left(\frac{x}{2^2}\right)+\dots+\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}-\frac{1}{\tan(x)}$$

حيث $x\ne 2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

**18** - برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$\sin x+\sin(2x)+\dots+\sin(nx)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{1}{2}x}\times\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

حيث $x\ne 2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

**19** - نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = 1+3+5+ \dots + (2n-1)$

1) احسب $S_1$ ، $S_2$ ، $S_3$ ، $S_4$

2) خمن عبارة $S_n$ بدلالة $n$ ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين .

**20** - $x$ عدد حقيقي كيفي

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+ \dots +x+1\right) = (x-1)\sum_{r=0}^{r=n-1} x^r$$

2) باستعمال العلاقة التي تسمح بحساب مجموع حدود متتالية هندسية بين صحة العلاقة السابقة .

**21** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $U_0 = 6$ و $U_{n+1} = 10U_n - 27$

1) احسب $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ ، $U_4$

2) خمن عبارة $U_n$ بدلالة $n$ ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.







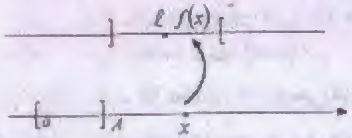
# الدرس 2

# النِهَايَاتُ وَ الاسْتِمْرَارُ

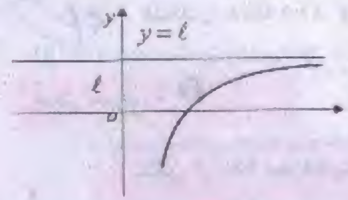
## 1 - النهايات في اللانهاية و المستقيمات المقاربة

### 1 - 1 النهاية المنتهية عند $(+\infty)$ و المستقيم المقارب الأفقي

القول ان الدالة $f$ لها نهاية حقيقية $\ell$ عند $(+\infty)$ يعني ان كل مجال مفتوح مركزه $\ell$ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من اجل كل قيم $x$ الكبيرة ( أي من اجل كل قيم $x$ من المجال $]A, +\infty[$ ) و تكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ .




اذا كانت $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ فان المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$



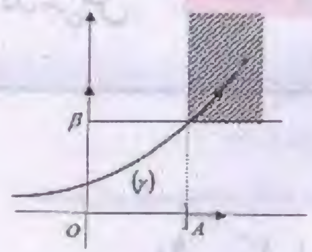

ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

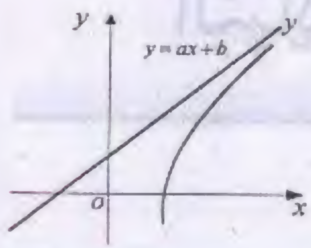
مثال -

الدوال $x\mapsto \frac{1}{x}$ ، $x\mapsto \frac{1}{x^2}$ ، $x\mapsto \frac{1}{x^n}(n\in IN^*)$ ، $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ لها النهاية صفر عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$

## 1 - 2 النهاية الغير المنتهية عند $(+\infty)$




نقول ان الدالة $f$ لها نهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$
يعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]\beta,+\infty[$
يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من اجل كل قيم $x$ الكبيرة
( أي من اجل كل قيم $x$ من المجال $]A,+\infty[$ )
و تكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .
إذا كانت $f(x)$ تكتب على الشكل
$f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$
فإن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$
مقارب مائل للمنحني الدالة $f$ بجوار $(+\infty)$




ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهايات الغير المنتهية عند $(-\infty)$

مثال -

. الدوال $x\mapsto x$ ، $x\mapsto x^2$ ، $x\mapsto x^n$ مع ( $n\in IN^*$ ) ، $x\mapsto\sqrt{x}$ لها النهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$

. إذا كان $n$ زوجي فإن $\lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty$

. إذا كان $n$ فردي فإن $\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

. الدالتان $x\mapsto\sin x$ و $x\mapsto\cos x$ ليست لهما نهاية عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$

### تمرين تدريبي . 1

لتكن $f$ دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$
1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2) أوجد العدد الحقيقي $A$ بحيث إذا كان $x>A$ فإن $2,9<f(x)<3,1$





✓ الحل

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$

2) نقول ان $2,9<f(x)<3,1$ يعني بذلك $2,999<\frac{3x-2}{x-1}<3,001$
وبما أننا نهتم بالقيم الكبرى لـ $x$ فإن $x-1>0$ .
بضرب حدود المتباينة $2,999<\frac{3x-2}{x-1}<3,1$ بالعدد $(x-1)$ نجد :
$2,999(x-1)<3x-2<3,001(x-1)$
أي $-0,001x-2,999<-2<0,001x-3,001$
حل المتراجحة $-0,001x-2,999<-2<0,001x-3,001$ يكافئ حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} -0,001x-2,999<-2 & \text{.......(1)} \\ 0,001x-3,001>-2 & \text{.......(2)} \end{cases} \quad \text{..................} ❶$$

بعد حل المتراجحة (1) نجد $x>-999$
بعد حل المتراجحة (2) نجد $x>1001$
إذن مجموعة حلول الجملة ❶ هي $]1001,+\infty[$
و بالتالي يمكن أخذ $A=1001$
. أي كلما أخذ $x$ قيما أكبر من $A$ فإن قيم $f(x)$ تتراكم حول القيمة 3 .

### تمرين تدريبي . 2

من أجل الدالة $f$ المعرفة على $IR$ نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x+1)=0$ و نعلم أيضا لما $x>5$ فإن $f(x)>4$
و لما $x<-8$ فإن $f(x)-x+1<0$ ماذا نستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة $f$ ؟

✓ الحل

. المعلومة « $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$ » تبين لنا أن المستقيم ذا المعادلة $y=4$ مقارب أفقي للمنحنى الممثل للدالة $f$ في جوار $(+\infty)$

. المعلومتان « $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x+1)=0$ » تبينان أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $(-\infty)$ .

. المعلومة « إذا كانت $x>5$ فإن $f(x)>4$ » تبين لنا أيضا أن المنحنى الممثل للدالة $f$ يكون فوق المستقيم ذي المعادلة $y=4$ على المجال $]5,+\infty[$

. المعلومة « إذا كانت $x<-8$ فإن $f(x)-x+1<0$ » تبين لنا أن المنحنى يقع تحت المستقيم المقارب المائل ذي المعادلة $y=x-1$ على $]-\infty,-8[$

### تمرين تدريبي - 3

لتكن $f$ دالة معرفة كما يلي $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$ مع $x\neq 0$

1) احسب $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)$

2) ماذا تستنتج من حساب النهايتين السابقتين بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة $f$ ؟

**الحل**

1) $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\mapsto-\infty} x = -\infty$

$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} x = +\infty$

2) نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+2+\frac{1}{x}$

- بما أن $\lim_{|x|\mapsto+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة $f$ في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

- بما أن $f(x)-(x+2)=\frac{1}{x}$ فإنه إذا كان $x>0$ فإن المنحنى يقع فوق المستقيم $(d)$ و إذا كان $x<0$ فإن المنحنى يقع تحت $(d)$ حيث $(d): y=x+2$

## 2 - نهاية دالة عند عدد حقيقي

نرمز بـ $D_f$ إلى مجموعة تعريف الدالة $f$

و $a$ عدد حقيقي ينتمي إلى $D_f$

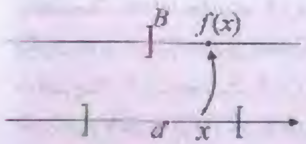
أو $a$ لا ينتمي إلى $D_f$ ( $a$ حاد لـ $D_f$ )

### 2 - 1 النهاية المنتهية عند $a$ - المستقيم المقارب العمودي

نقول أن الدالة $f$ لها النهاية $(+\infty)$ عند $a$

يعني أن كل مجال من الشكل $]\beta,+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم $x$ القريبة من $a$

(أي من أجل كل $x$ من المجال $]a-\alpha,a+\alpha[$ و من $D_f$ )

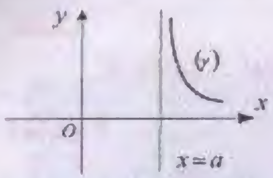







و نكتب $\lim_{x\mapsto a} f(x)=+\infty$

- إذا كانت $\lim_{x\mapsto a} f(x)=+\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب عمودي للمنحنى الممثل للدالة $f$




**ملاحظة**

1) نعرف بطريقة مماثلة $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ .

2) نقول أن $f(x)$ تؤول إلى $(-\infty)$ لما $x$ يؤول إلى $a$

يعني أن $-f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما $x$ يؤول إلى $a$

**مثال -**

لتكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين على $]0,+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2}$

- الصفر هو حاد لمجموعة تعريف $f$ .

مهما كانت قيمة العدد الحقيقي $M$ كبيرة فالأعداد $f(x)$ تتجاوز قيمة $M$

من أجل كل قيمة لـ $x$ من $]0,\frac{1}{M}[$ لأن المتباينة $\frac{1}{x}>M$ تكون صحيحة

عندما يكون $0<x<\frac{1}{M}$ و نكتب $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$

- بنفس الكيفية السابقة نبين أن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

### 2 - 2 النهاية الحقيقية ( المنتهية ) عند $a$

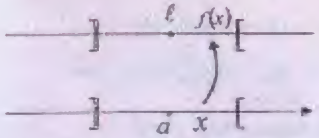
نقول أن العدد الحقيقي $\ell$ هو نهاية الدالة $f$ لما $x$ يقترب من $a$

يعني أن كل مجال مفتوح مركزه $L$ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم $x$ القريبة من $a$ ( أي من المجال $]a-\alpha,a+\alpha[$ و من $D_f$ )

و نكتب $\lim_{x\mapsto a} f(x)=\ell$

هذا التعريف يعني أن المسافة بين $f(x)$ و $\ell$ تقترب من الصفر.

إذن $\lim_{x\mapsto a} f(x)=\ell$ تعني أن $\lim_{x\mapsto a}|f(x)-\ell|=0$




**نتيجة**

إذا كان $a$ من $D_f$ و $f$ لها نهاية $\ell$ عند $a$ فإن $\lim_{x\mapsto a} f(x)=f(a)$

**خاصية**

إذا كانت $f$ لها نهاية $\ell$ عند $a$ فإن هذه النهاية وحيدة

**مثال -**

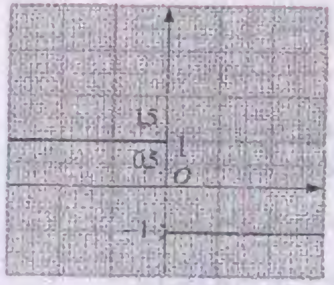
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

يمكننا أن نثبت صحة هاتين النهايتين باستعمال نظرية الحصر .

**ملاحظة**

ليس بالضرورة أن تكون لدالة نهاية عند قيمة من مجموعة تعريفها.

**مثال -**




$f$ دالة تمثيلها البياني كما في الشكل
$f(0)=1$ لكن 1 ليس نهاية لـ $f$ لما $x$ يؤول إلى الصفر.
لأن باعتبار المجال المفتوح $I=]0,5 ، 1,5[$ فإنه من أجل كل قيم $x$ القريبة من الصفر و أكبر تماما منه يكون $f(x)=-1$
لكن $-1$ لا ينتمي إلى المجال $I$ .

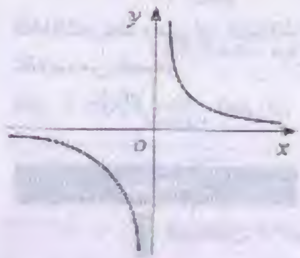
- **النهاية من اليمين و من اليسار عند $a$**

يحصل و أن دالة لا تقبل نهاية (حقيقية أو غير منتهية) عند $a$ لكن اقتصارها على مجال من الشكل $]a,b[$ لها نهاية $\ell$ عند $a$ .

نقول عندئذ أن $f$ لها نهاية من اليمين عند $a$ و نكتب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x)=\ell$

بنفس الطريقة إذا كان اقتصار $f$ على المجال $]c,a[$ يقبل نهاية $\ell$ عند $a$ نقول أن $f$ تقبل نهاية من اليسار عند $a$ و نكتب $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} a} f(x)=\ell$

**مثال -**




1) $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ ، $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x)=-\infty$

2) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2}}{x} & , x\neq0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$






$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{2|x|}{x}$$
$$=\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{2x}{x}=2$$
$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \underset{<}{\to} 0}\frac{2|x|}{x}$$
$$=\lim_{x \underset{<}{\to} 0}\frac{-2x}{x}=-2$$

الدالة $f$ ليس لها نهاية عند الصفر.

## تمرين تدريبي ❶

$f$ دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\sqrt{x+5}$ لها النهاية 3 عند 4
اوجد مجال $I$ مركزه 3 بحيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)\in]2,99 ، 3,01[$

✓ **الحل :**

القول أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2,99 ، 3,01[$ يعني $2,99 < f(x) < 3,01$
أي $2,99 < \sqrt{x+5} < 3,01$ بالتربيع نجد $8,9401 < x+5 < 9,0901$
و بطرح 5 من حدود هذه الأخيرة نجد $3,9401 < x < 4,0901$ إذن $I=]3,9401 ، 4,0901[$

## تمرين تدريبي ❷

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2,3\}$ . جدول تغيراتها هو

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ ↗ | $+\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $5$ |

استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى البياني للدالة $f$ و عين الوضع النسبي لهذه المستقيمات بالنسبة إلى منحنى $f$ .

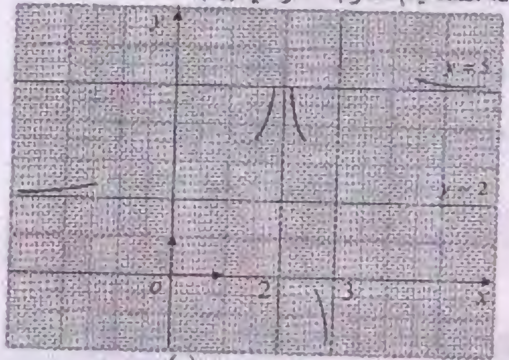
✓ **الحل :**

- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ فإن المستقيم $(d_1)$ ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $(\gamma)$

و بما انه من اجل كل $x$ من المجال $]-\infty, 2[$ لدينا $f(x) > 2$

فإن المنحنى $(\gamma)$ يقع فوق $(d_1)$

- بما ان $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ فإن المنحنى $(\gamma)$ له مستقيم مقارب عمودي $(d_2)$ معادلته $x = 2$ .




إذا كان $x < 2$ فإن $(\gamma)$ يقع قبل $(d_2)$

و إذا كان $2 < x$ فإن $(\gamma)$ يقع بعد $(d_2)$

- بما ان $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$

فإن المستقيم $x = 3$ ، $(d_3)$

مقارب عمودي لـ $(\gamma)$ .

إذا كان $3 < x$ فإن $(\gamma)$ يقع بعد $(d_3)$

و إذا كان $x < 3$ فإن $(\gamma)$ يقع قبل $(d_3)$

- بما ان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$ فإن المستقيم $(d_4)$ ذا المعادلة $y = 5$ مقارب افقي لـ $(\gamma)$

و بما انه من اجل كل $x \in ]3, +\infty[$ لدينا $f(x) > 5$ فإن المنحنى $(\gamma)$ يقع فوق $(d_4)$ .

## 3 - عمليات على النهايات

لما تكون للدالتين $f$ و $g$ نهايات معروفة نستطيع بصفة عامة استنتاج نهاية الدوال :

$f + g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ و نبين مختلف هذه النهايات في الجداول التالية :

النهايات مأخوذة عند $(+\infty)$ او عند $(-\infty)$ او عند عدد حقيقي $a$ .

$\ell$ و $\ell'$ عددان حقيقيان

- نهاية مجموع دالتين

| إذا كانت نهاية $f$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| إذا كانت نهاية $g$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| فإن نهاية $f + g$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ح ع ت |

- نهاية جداء دالتين

| إذا كانت نهاية $f$ | $\ell$ | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إذا كانت نهاية $g$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ او $-\infty$ |
| فإن نهاية $f \times g$ | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت |

- نهاية حاصل قسمة دالتين





- حالة نهاية الدالة $g$ غير معدومة

| إذا كانت نهاية $f$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ او $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إذا كانت نهاية $g$ | $\ell' \neq 0$ | $+\infty$ او $-\infty$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $+\infty$ او $-\infty$ |
| فإن نهاية $\frac{f}{g}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت |

- حالة نهاية الدالة $g$ معدومة :

| إذا كانت نهاية $f$ | $\ell > 0$ او $+\infty$ | $\ell > 0$ او $+\infty$ | $\ell < 0$ او $-\infty$ | $\ell < 0$ او $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إذا كانت نهاية $g$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0$ |
| فإن نهاية $\frac{f}{g}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت |

- حالات عدم التعيين هي $+\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$
- نعلم أن نهاية دالة كثيرة الحدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة.
- نهاية الدالة الناطقة عند $+\infty$ او $-\infty$ تساوي نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأكبر درجة في البسط و كذلك في المقام.

مثال -

(1 $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

(2 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$



### تمرين تدريبي - 1

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x$

احسب النهايتين التاليتين $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

### ✓ الحل

- لدينا $\lim_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} -3x^2 = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

إذن لا نستطيع ان نستنتج نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ ( حالة عدم التعيين )

نهاية دالة كثيرة الحدود عند $(+\infty)$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة و عليه :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} -3x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ .

كل حد من المجموع له نهاية $(-\infty)$ و بالتالي نستطيع تطبيق القواعد العملية المتعلقة بمجموع دالتين و عليه فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ .

## تمرين تدريبي . ❷ .

$f$ دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x^3\left(4-\frac{1}{x}\right)$ .

ادرس نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ و عند الصفر.

✓ الحل :

- نضع $U(x)=x^3$ و $V(x)=4-\frac{1}{x}$ عندئذ $f=U\times V$

$\lim_{x\to+\infty} U(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} V(x)=4$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- لدينا $\lim_{x\xrightarrow{>}0} U(x)=0$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} V(x)=-\infty$ .

إذن في هذه الحالة لدينا عدم التعيين و بالتالي لا نستطيع ان نستنتج نهاية $f(x)$ عند $0$ .

ويمكن ان نكتب $f(x)=4x^3-x^2$ و منه $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0$

## تمرين تدريبي . ❸

1) لتكن $f$ الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x^2+x-7}{x^2-3x+2}$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة $f$

ب) احسب النهايتين $\lim_{x\to 2} f(x)$ و $\lim_{x\to 1} f(x)$

2) لتكن $g$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=\frac{x+2}{x+1+\sqrt{x}}$

احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ .

✓ الحل

1) أ) $f$ دالة معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2-3x+2\neq 0$ .

المعادلة $x^2-3x+2=0$ لها حلان هما $1$ و $2$

وبالتالي مجموعة تعريف الدالة $f$ هي $\mathbb{R}-\{1,2\}$ .





ب) $\lim_{x\to 1}(2x^2+x-7)=-4$ و $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$ إذن يجب معرفة إشارة المقام .

على يسار العدد $1$ إشارة المقام موجبة و على يمينه إشارة المقام سالبة و منه

$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 2}(2x^2+x-7)=3$ موجبة و $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$

إذن يجب معرفة إشارة المقام على يسار $2$ المقام سالب و على يمينه المقام موجب و منه :

$\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$

2) من اجل قيم كبرى لـ $x$ فإن سلوك $x+2$ و $x+1+\sqrt{x}$ من سلوك $x$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$$

و بالتالي نستطيع أن نخمن في أول وهلة ان $1$ هي نهاية $g$ عند $+\infty$ .

و للبرهان على ذلك نضع العنصر المهيمن $x$ كعامل مشترك في البسط و المقام :

من اجل كل $x\neq 0$ لدينا $g(x)=\dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}$

و منه نستنتج ان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

## ❹ - نظريات المقارنة



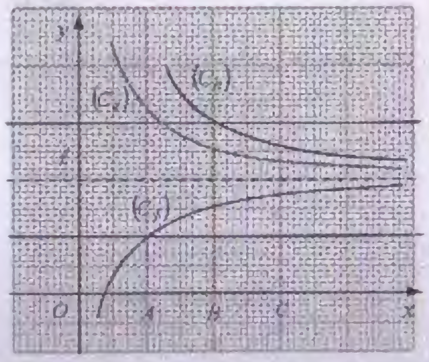
### 4 - 1 نظرية الحصر

**مبرهنة ❶**

اذا كان من اجل كل $x$ من المجال $]\alpha,+\infty[$

لدينا $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=\ell$

فإن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\ell$ حيث $\ell$ عدد حقيقي .




**الإثبات**

ليكن $J$ مجالا مفتوحا كيفيا مركزه $\ell$

. بما ان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ فإنه يوجد عدد حقيقي $A$

بحيث من اجل كل $x \rangle A$ يكون $f(x)\in J$ .

. بما ان $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\ell$ فإنه يوجد عدد حقيقي $B$

بحيث من اجل كل $x \rangle B$ يكون $h(x)\in J$

اذا اخترنا $C$ عددا حقيقيا بحيث $C \rangle A$ و $C \rangle B$

وكان $x \rangle C$ فإن $f(x)\in J$ و $h(x)\in J$

لكن $f(x) \le g(x) \le h(x)$

إذن $g(x) \in J$ مما يبرهن ان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$

**ملاحظة**

نتيجة المبرهنة (1) تبقى صحيحة إذا كان $x$ يؤول إلى $(-\infty)$ .

**نتيجة**

إذا كان $f(x) \le g(x) \le h(x)$ و $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ فإن $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

**مبرهنة 2**

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $I = ]\alpha, +\infty[$ و $\ell$ عدد حقيقي.

إذا كان من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $|f(x) - \ell| \le g(x)$

و إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$



**الإثبات:**

المتباينة $|f(x) - \ell| \le g(x)$ تعني ان $\ell - g(x) \le f(x) \le \ell + g(x)$ .

و بما ان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ و حسب القواعد العملية في حساب النهايات فإن ،

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\ell - g(x)] = \ell$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ell + g(x)] = \ell$ .

وحسب المبرهنة (1) فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ .

**مثال**

- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

**✓ الحل**

- من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $-1 \le \sin x \le 1$

و عليه $\dfrac{-1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$

و لكون $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$ .

فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

- من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $-1 \le \cos x \le 1$





و عليه $\dfrac{-2}{x} \le \dfrac{\cos x - 1}{x} \le 0$ و لكون $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x} = 0$

فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ .

## 4 - 2 المقارنة في اللانهاية

**مبرهنة**

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على مجال $I = ]\alpha, +\infty[$ .

1) إذا كان من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f(x) \ge g(x)$ و إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) إذا كان من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f(x) \le g(x)$ و إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

**ملاحظة**

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان $x$ يؤول الى $(-\infty)$ .

**مثال -**

احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin x)$

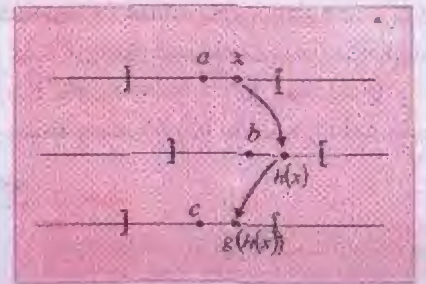
**✓ الحل :**

من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $-1 \le \sin x \le 1$ و منه $1 + x \ge x + \sin x \ge -1 + x$

- بما ان $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x) = +\infty$ و $f(x) \ge 1 + x$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .

- بما ان $\lim\limits_{x \to -\infty} (-1 + x) = -\infty$ و $f(x) \le -1 + x$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

## 5- نهاية الدالة المركبة




**مبرهنة**

$f$ ، $g$ ، $h$ ثلاث دوال بحيث $f(x) = g(h(x))$ .

كل من الحروف $a, b, c$ تمثل إما اعدادا حقيقية او $+\infty$ او $-\infty$ .

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$

و إذا كانت $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

مثال -

1) $g$ و $h$ دالتان معرفتان كما يلي $h(x)=2x+3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(h(x))$

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x}{x-3}}$



✓ الحل

1) على المجال $]-1,+\infty[$ لدينا $g(h(x))=\sqrt{2x+4}$

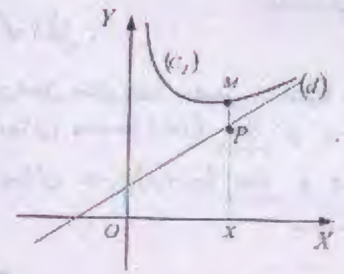
و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(h(x))=+\infty$

2) نضع $h(x)=X=\frac{3x}{x-3}$ و $g(X)=\sqrt{X}$

ومنه $\sqrt{\frac{3x}{x-3}}=g(h(x))$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=3$ و $\lim\limits_{X\to3} g(X)=\sqrt{3}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x}{x-3}}=\sqrt{3}$ .

## 6 - المستقيم المقارب المائل




$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم معطى.

القول أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=ax+b$ مع $a\neq0$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$

يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

**التفسير الهندسي**

من أجل قيمة $x$ من مجال تعريف الدالة $f$ نعتبر النقطة $M$ من $(C_f)$ و النقطة $P$ من $(d)$ فاصلتهما $x$ عندئذ يكون $PM=|f(x)-(ax+b)|$

و عليه من أجل قيم كبرى لـ $x$ المسافة $PM$ تقترب من الصفر و هذا مما يفسر أن المنحنى $(C_f)$ يكون بمحاذاة $(d)$ في جوار $(+\infty)$ .

و لمعرفة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ نعين إشارة $[f(x)-(ax+b)]$

ملاحظة

نعرف بنفس الطريقة المستقيم المقارب المائل بجوار $(-\infty)$



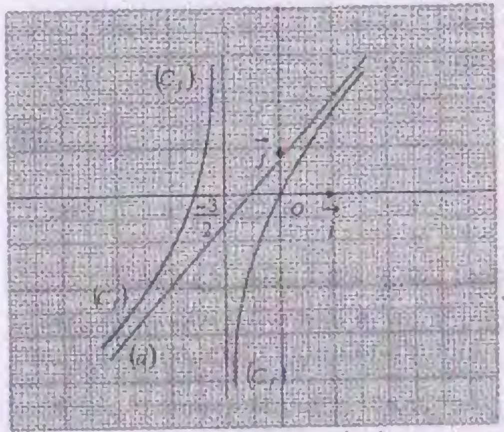


مثال -

- بين أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ للمنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\frac{2x^2+3x}{x+1}$

- ثم حدد وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(d)$

✓ الحل




$$f(x)-(2x+1)=\frac{2x^2+3x}{x+1}-(2x+1)$$

$$=\frac{2x^2+3x-2x^2-3x-1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=0$ فإن المستقيم $(d)$ هو مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ في جوار $(+\infty)$.

- إذا كان $x<-1$ فإن $\frac{-1}{x+1}>0$ و بالتالي المنحني $(C_f)$ يقع فوق $(d)$

و إذا كان $x>-1$ فإن $\frac{-1}{x+1}<0$ و بالتالي المنحنى $(C_f)$ يقع تحت $(d)$ .

**مبرهنة**

$f$ دالة بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ مع $a$ و $b$ عددين حقيقيين و $a\neq0$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان $x$ يؤول إلى $-\infty$

مثال -

$f$ دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

بين أن $(C_f)$ له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ و آخر في جوار $(-\infty)$ .

✓ الحل

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

إذن المنحنى $(C_f)$ له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ معادلته $(d_1): y=x$

- بنفس الطريقة نبين أن $(C_f)$ له مستقيم مقارب مائل $(d_2)$ معادلته $y=-x$ في جوار $(-\infty)$

## 7 - الاستمرار

$f$ دالة و $I$ مجال محتوى في $D_f$

### 1 - 7 الاستمرار عند عدد و على مجال

- القول أن $f$ مستمرة عند العدد $a$ من $I$ يعني أن $f$ لها نهاية عند $a$ و هذه النهاية بالضرورة $f(a)$ ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ أو $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$

- القول أن $f$ مستمرة على مجال $I$ يعني أن $f$ مستمرة عند كل قيمة من $I$ .

**نتيجة**

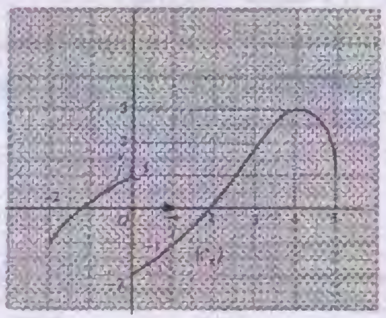
نستنتج من تعريف الاستمرار و القواعد العملية لحساب النهايات أن مجموع ، و جداء و مركب دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة.

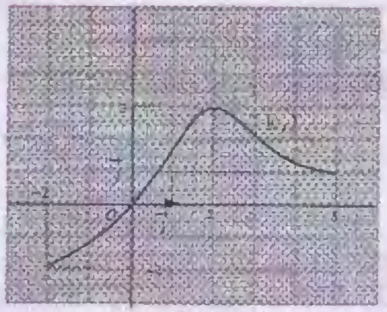
**ملاحظة**

دراسة استمرار دالة عند قيمة ليست من مجموعة التعريف ليس له معنى .

**مثال - 1**

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على المجال $I=[-2,5]$ ، $(C_f)$ و $(C_g)$ منحناهما البيانيين كما هو موضح في الشكلين.









- الدالة $f$ مستمرة على المجال $I$ لأن $(C_f)$ عبارة عن خط منحن غير متقطع رسمناه بدون رفع القلم .

- الدالة $g$ غير مستمرة على المجال $I$ لأن $\lim_{x\to 0} g(x)=1$ و $\lim_{x\to 0} g(x)=-2$

إذن $g$ ليست لها نهاية عند $x=0$

**مثال - 2**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{|x|-1}{2}$ . ادرس استمرار $f$ عند $x=0$

**✓ الحل**

بما أن $\begin{cases}|x|=x\ , & x\geq 0\\ |x|=-x\ , & x\leq 0\end{cases}$

فإن $\begin{cases}f(x)=\frac{x-1}{2}\ , & x\geq 0\\ f(x)=\frac{-x-1}{2}\ , & x\leq 0\end{cases}$

$$f(0)=\frac{|0|-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x-1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

إذن الدالة $f$ لها نهاية $-\frac{1}{2}$ عند $x=0$ و بالتالي فهي مستمرة عند $x=0$

### 2 - 7 قابلية الاشتقاق و الاستمرار

**مبرهنة**

- إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ من $I$ فإن $f$ مستمرة عند $a$
- إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على $I$ فإن $f$ مستمرة عل $I$

**الإثبات**

$f$ دالة قابلة للاشتقاق عند $a$ يعني أن الدالة $g$ المعرفة بـ :

$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية $f'(a)$

من أجل كل $x\neq a$ لدينا $g(x)(x-a)=f(x)-f(a)$

ومنه ينتج $f(x)=f(a)+g(x)(x-a)$

و بما أن $\lim_{x\to a} g(x)=f'(a)$ و $\lim_{x\to a}=(x-a)=0$

فإن $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ و هذا يعني أن $f$ دالة مستمرة عند $a$ .

**ملاحظة :**

إذا كانت دالة مستمرة عند عدد $a$ فلا نستطيع القول انها قابلة للاشتقاق عند $a$

**مثال -**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|+1$

- الدالة $f$ مستمرة عند الصفر لكن غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لأن:

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{x+1-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{-x+1-1}{x} = -1$$

و $$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

**استمرار الدوال المرجعية**

- دالة الجذر التربيعي قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ إذن فهي مستمرة على نفس المجال

وبما ان $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ فإن هذه الدالة مستمرة عند الصفر

ومنه دالة الجذر التربيعي مستمرة على المجال $[0,+\infty[$ .

- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و بالتالي فهي مستمرة على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها .

- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن فهما مستمرتان على $\mathbb{R}$

**ملاحظة**

كل الدوال المشكلة من دوال مرجعية مستمرة على مجموعة تعريفها.

**مثال -**

$f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

مجموعة تعريف $f$ هي $\mathbb{R}$ بوضع $g(x)=x^2+1$ و $h(x)=\sqrt{x}$ يكون $f(x)=hog(x)$

إذن الدالة $f$ هي تركيب دالتين مرجعيتين وبالتالي فالدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

## 8 - دراسة دالة الجزء الصحيح

من اجل كل عدد حقيقي $x$ يوجد عدد صحيح وحيد $n$ بحيث $n+1 > x \geq n$ .

نسمي دالة الجزء الصحيح بالدالة التي نرمز لها بـ $E$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي $x$ من المجال





$[n,n+1[$ العدد الصحيح $n$ و نكتب $E(x)=n$

- نختار بعض القيم لـ $x$

$E(0)=E(0,25)=E(0,75)=0$

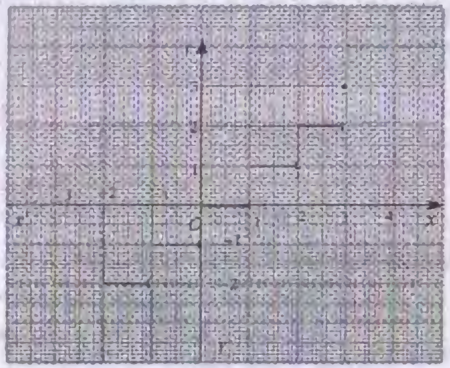
$E(1)=E(1,002)=E(1,999)=1$

$E=(-0,3)=E(-0,5)=-1$

من اجل $1 > x \geq 0$ : $E(x)=0$

من اجل $2 > x \geq 1$ : $E(x)=1$

من اجل $3 > x \geq 2$ : $E(x)=2$



- على المجال $[-2,3[$ يتكون التمثيل البياني للدالة $E$ من خمس قطع مستقيمة ونقطة معزولة .

- الدالة $E$ معرفة عند 2 و على مجال مركزه 2

وبما ان $\lim_{x \underset{<}{\to} 2} E(x)=1$ و $\lim_{x \underset{>}{\to} 2} E(x)=2$ فإن الدالة $E$ ليست لها نهاية عند 2

و بالتالي فهي ليست مستمرة عند هذه القيمة وعليه فإنها مستمرة على $]1,2[$

## 9 - الدوال المستمرة و حلول المعادلات

في حالة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية نستطيع حل المعادلة $f(x)=k$

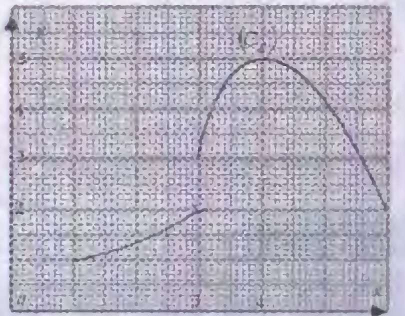
أما في حالة دالة كيفية لا نستطيع تعيين الحل الجبري لذلك نلجأ إلى التحليل الذي يسمح لنا بإيجاد القيم التقريبية للحلول إن وجدت و بالدقة التي نريدها.

و قبل إجراء أي حساب لابد من معرفة هل توجد حلول أم لا.

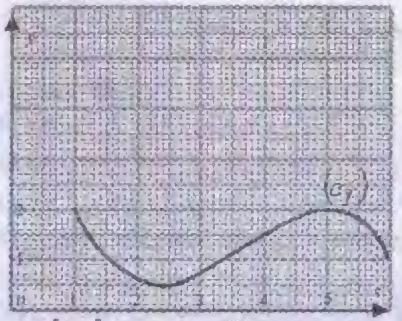
**مثال -**

المنحنيان الممثلان في الشكلين المجاورين هما لدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $[1,6]$

الحل البياني للمعادلة $f(x)=k$ هو البحث عن فواصل نقط تقاطع إن وجدت بين $(C_f)$ و المستقيم ذي المعادلة $y=k$



الدالة $g$ غير مستمرة على $[1,6]$



الدالة $f$ مستمرة على $[1,6]$

- بالنسبة إلى الدالة $f$ من أجل $2 \ge k \ge 1$ المعادلة $f(x)=k$ لها حلول
- بالنسبة إلى الدالة $g$ من أجل كل $5 \ge k \ge 1$ لا توجد حلول للمعادلة $g(x)=k$

لأنه إذا كان $2 < k < 3$ فإن المستقيم $y=k$ لا يقطع المنحنى $(C_g)$ .

## 9 - 1 نظرية القيم المتوسطة

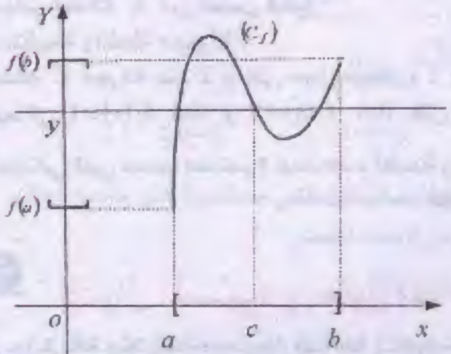
**مبرهنة**

$f$ دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ .

من أجل كل عدد حقيقي $y$ محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي $c$ محصورة بين $a$ و $b$ بحيث $f(c)=y$ .

نعبر عن نتيجة المبرهنة بكيفيتين مختلفتين بفرض أن $f(a)\le f(b)$ و بوضع $I=[a,b]$ نستطيع القول بطرق متكافئة

- من أجل كل $y$ من المجال $[f(a),f(b)]$ المعادلة $f(x)=y$ ذات المجهول $x$ تقبل على الأقل حلا $c$ من المجال $I$ .
- كل عدد حقيقي $y$ من $[f(a),f(b)]$ هو صورة بالدالة $f$ على الأقل لعدد حقيقي $c$ من $I$




**صورة مجال بواسطة دالة مستمرة**

$f$ دالة مستمرة على $I$ .

صورة $I=[a,b]$ بالدالة $f$ و نرمز لها ب $f(I)$ هي مجموعة كل الأعداد $f(x)$ لما $x$ يمسح $I$

**ملاحظة**

المجال $[f(a),f(b)]$ محتوى في $f(I)$

## 9 - 2 الدالة المستمرة و الرتيبة تماما على $[a,b]$

**مبرهنة ❶**

إذا كانت $f$ دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $I=[a,b]$ فإن ،

1) صورة $I$ بالدالة $f$ هي المجال $[f(a),f(b)]$ في حالة $f$ متزايدة تماما و $[f(b),f(a)]$ في حالة $f$ متناقصة تماما

2) من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن للمعادلة $f(x)=k$ حلا وحيدا في $[a,b]$ .

نقول عندئذ أن $f$ تقابل من $[a,b]$ في $[f(a),f(b)]$ أو في $[f(b),f(a)]$





**الإثبات**

نفرض أن $f$ مستمرة و متزايدة تماما على $I$ و $k$ عددا حقيقيا من المجال $[f(a),f(b)]$

1) من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $I$ لدينا $f(b)\ge f(x)\ge f(a)$

إذن كل صورة $f(x)$ تنتمي إلى $[f(a),f(b)]$

و هذا معناه $f(I)\subset[f(a),f(b)]$ ........................ (1)

و بالعكس إذا كان $y\in[f(a),f(b)]$ فإن ،

$y$ هي صورة بالدالة $f$ على الأقل لعدد حقيقي $c$ من $I$ إذا $y\in f(I)$

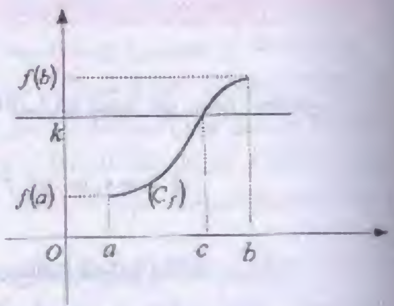
و هذا معناه $[f(a),f(b)]\subset f(I)$ ........................ (2)

من (1) و (2) نجد أن $f(I)=[f(a),f(b)]$

2) حسب نظرية القيم المتوسطة نستطيع إيجاد عدد $c$ من $I=[a,b]$ بحيث $f(c)=k$ .

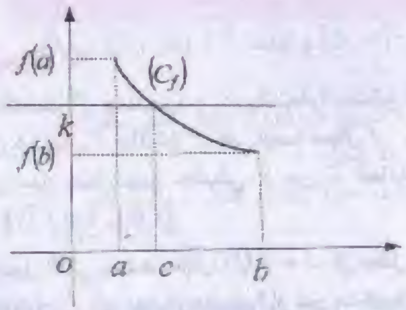
إذن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $I$ و هذا الحل يكون وحيدا لأنه إذا كان لدينا عددان حقيقيان $c$ و $c'$ من $I$ و $c<c'$ بحيث $f(c)=f(c')=k$ فإن $f$ ليست متزايدة وهذا تناقض حيث $f$ متزايدة تماما على $I$ .

نتيجة المبرهنة تبقى صحيحة إذا كانت $f$ متناقصة تماما على $[a,b]$




$f$ دالة متزايدة تماما على $[a,b]$

مجموعة الوصول هي $[f(a),f(b)]$




$f$ دالة متناقصة تماما على $[a,b]$

مجموعة الوصول هي $[f(b),f(a)]$

**ملاحظة**

إذا كانت $f(a)=k$ فإن $c=a$ و إذا كان $f(b)=k$ فإن $c=b$

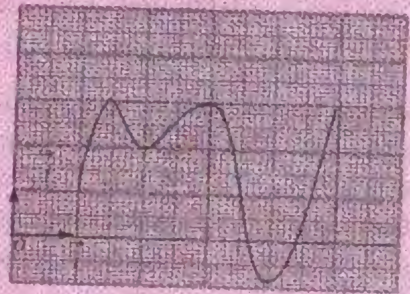
**نتيجة**

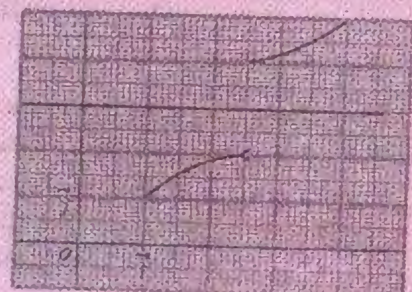
إذا كانت $f$ دالة مستمرة و رتيبة تماما على $I=[a,b]$ و إذا كانت $f(a)f(b)<0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $I$ .

**ملاحظة**

1) إذا كانت الدالة $f$ ليست مستمرة فوجود الحل ليس مضمونا كما يبينه الشكل (1) فمثلا المعادلة $f(x)=3$ ليس لها حل.

2) وحدانية الحل مضمونة بالرتابة التامة (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) فإذا كانت الرتابة غير تامة نستطيع أن نتحصل على عدة حلول كما يبينه الشكل (2) فمثلا المعادلة $f(x)=3$ لها عدة حلول على المجال $[1,5]$.





**مبرهنة 2**

إذا كانت $f$ مستمرة و رتيبة تماما ، نتائج المبرهنة 1 السابقة تمدد على مجال كيفي $I$ . صورة المجال $I$ بالدالة $f$ هي أيضا مجال $J$ .
ومن أجل كل عدد حقيقي $y$ من $J$ المعادلة $f(x)=y$ لها حل وحيد في
$I$ . $\left]f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

الجدول الآتي يحدد مجال $J=f(I)$ في كل حالة من الحالات الممكنة لـ $I$ .
نتقبل أن $f$ لها نهاية حقيقية أو غير منتهية على أطراف $I$
وسنريك في الجدول التالي المجال $J$، حيث $a$ و $b$ تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

| | صورة $I$ بالدالة $f$ هو المجال | |
|---|---|---|
| $I=$ | $f$ متزايدة تماما على $I$ | $f$ متناقصة تماما على $I$ |
| $[a,b]$ | $[f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)]$ |
| $]a,b]$ | $]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$ | $[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$ |
| $[a,b[$ | $[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)]$ |
| $]a,b[$ | $]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$ |





## تمرين تدريبي

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=-x^3+3x^2+1$
برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in[3,4]$ ثم أعط حصرا له بتقريب $10^{-1}$

**✓ الحل**

الجدول التالي يلخص لنا دراسة الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $5$ | ↘ | $1$ | ↘ | $-15$ | ↘ | $-\infty$ |

- بما أن الدالة $f$ مستمرة ومتناقصة على المجال $[3,4]$ وأيضا $f(3)f(4)<0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $[3,4]$.
- الجدول السابق يبين أيضا أنه من أجل كل $x<3$ لدينا $f(x)>0$ ومن أجل كل $x>4$ لدينا $f(x)<0$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ إلا الحل $\alpha$ .
- بالآلة الحاسبة البيانية نجد $f(3,1)=0,39$ و $f(3,2)=-1,04$ إذن $3,1<\alpha<3,2$

## 9 - 3 القيم التقريبية لحل معادلة

نظرية القيم المتوسطة تسمح لنا بواسطة الحصر المتوالي بتحديد القيم القريبة من حل المعادلة $f(x)=0$ على المجال المعطى $I=[a,b]$
نفرض أن $f(a)<0$ و $f(b)>0$ و ليكن $x\in[a,b]$ .

**طريقة المسح**

نفرض أن $f$ مستمرة و متزايدة تماما على $[a,b]$ و نقوم بحساب قيم $f$ ابتداء من $f(a)$ بخطوة مقدارها $p$ على النحو التالي،
$f(a+p)$ ، $f(a+2p)$ ، ..... حتى نتحصل على القيمة الموجبة $f(a+kp)$ مع $k\in\mathbb{N}$ .
من القيمة $a'$ التي تسبق $a+kp$ نبدل الخطوة $p$ بالخطوة $p'$ حيث $p'=\frac{p}{10}$ و نتابع الحسابات بالكيفية السابقة $f(a+p')$ ، ...... ،
نكمل هذه العملية حتى نتحصل على التقريب المطلوب للحل.

مثال - ◆

من أجل المعادلة $x^3-6x^2+7=0$ . اوجد حصرا بتقريب 0,001 للحل $\beta$ ،
حيث $\beta$ محصورة بين 0 و 4 .

✓ الحل

نشكل اولا جدولا من عمودين الأول لـ $x$ و الثاني لـ $f(x)$ حيث $f(x)=x^3-6x^2+7$ .
ابتداء من الصفر بخطوة $p=1$ نراقب قيمة $x$ التي من أجلها يكون $f(x)\langle 0$ و في هذه الحالة تكون $x=1$ .
ونشكل جدولا ثانيا بخطوة مقدار 0,1 . ابتداء من القيمة 1 و نراقب قيمة $x$ التي من أجلها يكون $f(x)\langle 0$ و في هذه الحالة $x=1,2$
و نشكل جدولا ثالثا بخطوة مقدار 0,01 ابتداء من القيمة 1,2 و نراقب قيمة $x$ التي من أجلها يكون $f(x)\langle 0$ و التي هي $x=1,20$
و نشكل جدولا رابعا بخطوة مقدارها 0,001 ابتداء من 1,20 و نراقب قيمة $x$ التي من أجلها يكون $f(x)\langle 0$ و في هذا الجدول $x=1,208$
الحصر بتقريب 0,001 للحل $\beta$ هو $1,208 \langle \beta \langle 1,209$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 7 |
| 1 | 2 |
| 2 | -9 |

$p=1$
$1\langle \beta \langle 2$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1,1 | 1,071 |
| 1,2 | 0,088 |
| 1,3 | -0,943 |

$p=0,1$
$1,3\langle \beta \langle 1,2$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1,2 | 0,088 |
| 1,21 | -0,0131 |

$p=0,01$
$1,21\langle \beta \langle 1,20$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1,200 | 0,0880 |
| 1,201 | 0,0779 |
| 1,204 | 0,0480 |
| 1,206 | 0,0276 |
| 1,207 | 0,0176 |
| 1,208 | 0,072 |
| 1,209 | -0,01 |

$p=0,001$

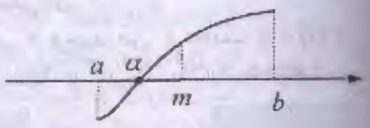
**طريقة ديكتومي ( القسمة على اثنين )**

نقسم المجال $[a,b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول ، و نحسب $f(m)$ حيث $m$ منتصف المجال $[a,b]$
إشارة $f(m)$ تبين لنا انتماء الحل $\alpha$ إلى $[a,m]$ او إلى $[m,b]$ .

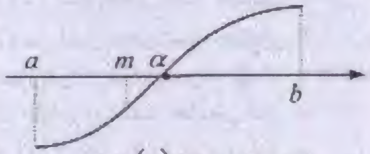




- إذا كان $f(m)\langle 0$ فإن $\alpha$ ينتمي إلى $[m,b]$ و في هذه الحالة نعيد قسمة المجال $[m,b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول و نحسب $f(m')$ حيث $m'=\frac{m+b}{2}$ .
- إشارة $f(m')$ تبين لنا انتماء الحل $\alpha$ إلى $[m',b]$ أو إلى $[m,m']$ و هكذا نعيد عملية قسمة المجالات حتى نحصل على التقريب المطلوب .




( إذا كانت $f(m)\rangle 0$ )
( $\alpha$ تنتمي إلى $[a,m]$ )




( إذا كانت $f(m)\langle 0$ )
( $\alpha$ تنتمي إلى $[m,b]$ )

**ملاحظة**

إذا كان $f(m)\rangle 0$ فإن $\alpha$ ينتمي إلى المجال $[a,m]$ نعيد نفس العملية السابقة للحصول على التقريب المطلوب .

مثال - ◆

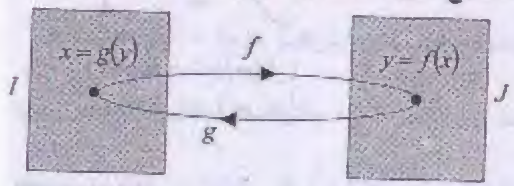
من أجل المعادلة $x^3-6x^2+7=0$ . اوجد حصرا بتقريب 0,1 للحل $\beta$ حيث $4\rangle \beta \rangle 0$

✓ الحل

نضع $f(x)=x^3-6x^2+7$ ، $I=[a,b]=[0,4]$ ، $f(0)=7$ ، $f(4)=-25$
. بقسمة المجال $[0,4]$ إلى مجالين لهما نفس الطول نحصل على $[0,2]$ و $[2,4]$
لدينا $m=\frac{0+4}{2}=2$ و $f(m)=f(2)=-9$
بما أن $f(m)\langle 0$ فإن الحل $\beta$ ينتمي الى المجال $[0,2]$
. نقسم المجال $[0,2]$ إلى مجالين لهما نفس الطول فنحصل على $[1,2]$ ، $[0,1]$
لدينا $m'=1$ و $f(m')=2$
بما أن $f(m')\rangle 0$ فإن الحل $\beta$ ينتمي إلى $[1,2]$
. نقسم المجال إلى $[1,2]$ إلى مجالين $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ ، $\left[\frac{3}{2},2\right]$ .
لدينا $m''=\frac{3}{2}$ و $f(m'')=-3,125$
بما أن $f(m'')\langle 0$ فإن الحل $\beta$ ينتمي إلى $[1 ، 1,5]$ و منه $1,0\langle \beta \langle 1,5$.

## ⑩ - مفهوم الدالة العكسية

$f$ دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال كيفي $I$
و $J$ مجال بحيث $J=f(I)$ . عندما يتحقق الشرطان التاليان معا :
1) من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $I$ يكون $f(x)$ ينتمي إلى $J$
2) من اجل كل عدد حقيقي $y\in J$ يوجد عدد حقيقي $x$ وحيد من $I$ بحيث $f(x)=y$ .
نقول أن $f$ تقابل من $I$ في $J$ و عندئذ نستطيع تعريف دالة $g$ على $J$ بالكيفية التالية :
إذا كان $y$ عدد حقيقي من $J$
و $y=f(x)$ فإن $g(y)=x$ .
نقول ان الدالة $g$ المعرفة على $J$ هي الدالة العكسية للدالة $f$ على $I$ .




### نتيجة

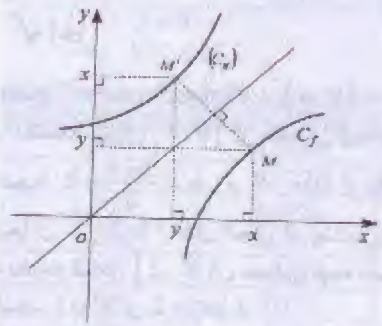
من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $I$ لدينا $g(f(x))=x$ ومن اجل كل عدد حقيقي $y$ من $J$ لدينا $f(g(y))=y$

### ملاحظة

الدالة العكسية للدالة $g$ هي الدالة $f$ .

### التمثيل البياني للدالة العكسية

$f$ دالة معرفة على $I$ و تأخذ قيمها في $J$
و $g$ الدالة العكسية لها .
إذن من اجل كل $x$ من $I$ ومن اجل كل $y$ من $J$
$f(x)=y$ تكافئ $x=g(y)$ .
$(C_f)$ و $(C_g)$ المنحنيان الممثلان للدالتين $f$ و $g$ على الترتيب في معلم متعامد و متجانس.




$(C_f)$ و $(C_g)$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ .
القول ان النقطتين $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ يكافئ القول ان $x'=y$ و $y'=x$ .
نفرض أن $M$ نقطة كيفية من $(C_f)$ إحداثياها $(x, f(x))$ وتنظيرتها بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هي $M'(x',y')$ حيث $x'=f(x)$ و $y'=x$ و بما ان $M$ تنتمي إلى $(C_f)$ فان $x=g(y)$ و $y=f(x)$ إذن :

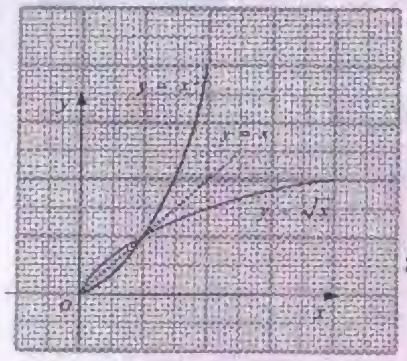




إحداثيتا $M'$ هي $(y, g(y))$ مما يبين أن $M'$ تنتمي إلى $(C_g)$
بنفس الطريقة نبين انه إذا كانت $M'$ من $(C_g)$ فإن نظيرتها $M$ من $(C_f)$ .

مثال -

الدالتان $f:x\mapsto x^2$ و $g:x\mapsto\sqrt{x}$ مستمرتان و متزايدتان على المجال $[0,+\infty[$ و لدينا $y=x^2$ يكافئ $x=\sqrt{y}$
اي $y=f(x)$ يكافئ $x=g(y)$
مما يعني ان $g$ هي الدالة العكسية للدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$
و بالتالي فإن $(C_g)$ هو نظير $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$




### تمرين تدريبي

لتكن $f$ دالة معرفة على المجال $[2,5]$ كما يلي $f(x)=2x^2-4x-6$
بين ان $f$ تقبل دالة عكسية $g$ يطلب تحديد مجموعة بدئها و مجموعة وصولها، ثم اوجد عبارتها.

### ✓ الحل

. الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فهي مستمرة على $[2,5]$
. الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للاشتقاق على $[2,5]$ و من اجل كل $x\in[2,5]$ لدينا $f'(x)=4x-4$
من اجل كل $x$ من $[2,5]$ لدينا $f'(x)>0$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[2,5]$
إذن الدالة $f$ تقابل من $[2,5]$ في $[f(2), f(5)]$ و بالتالي تقبل دالة عكسية مجموعة بدئها $[f(2),f(5)]=[-6,24]$ ومجموعة وصولها $[2,5]$ .
$y=f(x)$ يكافئ $y=2x^2-4x-6$ يكافئ $2x^2-4x-6-y=0$
نضع $2x^2-4x-6-y=0$ ....... (1)
مميز المعادلة (1) ذات المجهول $x$ هو $\Delta=4(16+2y)$
بما ان $y\in[-6,24]$ فإن $\Delta>0$ ومنه المعادلة (1) لها حلان هما :

$x_1=\frac{2+\sqrt{16+2y}}{2}$ و $x_1=\frac{2-\sqrt{16+2y}}{2}$

$x_2$ مرفوض لأن من اجل $y=-6$ نجد $x_2=0$ و $0\notin[2,5]$
إذن الدالة $g$ معرفة على $[-6,24]$ بـ $g(y)=x_1=\frac{2+\sqrt{16+2y}}{2}$

# تطبيقات نموذجية

## تطبيق 1 حساب النهايات

ادرس نهاية الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=4x^3-2x-1$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$
2) $f(x)=-x^4+3x^2+7$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$
3) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ و عند 2
4) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ و عند -3
5) $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x-2}$ عند $+\infty$ و $-\infty$ و عند 2
6) $f(x)=x^2+3-\dfrac{2}{(x-4)^2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ و عند 4

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^4)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x^4)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ و $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ إذن لتعيين $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ نعين إشارة $(x-2)$

إذا كان $x>2$ فإن $x-2>0$ و إذا كان $x<2$ فإن $x-2<0$

إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

بما ان $\lim\limits_{x\to-3}(x^2+3x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)=0$

فإن نهاية $f$ في جوار 3 هي من الشكل $\dfrac{0}{0}$







من اجل $x\neq-3$ يكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{x(x+3)}{x+3}=x$

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3} f(x)=-3$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$

فحسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{(x-4)^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3)=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

## تطبيق 2 حساب النهايات لدوال ناطقة

ادرس نهاية الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية ،

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$ عند $-\infty$ , $+\infty$ , 1 , 5
2) $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ عند 2
3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)}$ عند $+\infty$ و عند 2
4) $f(x)=\dfrac{|x^2-x|}{x^2+x-2}$ عند $+\infty$, $-\infty$, 1

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

- $\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$ ، $\lim\limits_{x\to5}(x+2)=7$ و $\lim\limits_{x\to1}(x^2-6x+5)=\lim\limits_{x\to5}(x^2-6x+5)=0$

اذن لتعيين نهاية $f$ عند 1 أو عند 5 لابد من معرفة إشارة المقام.

- من أجل كل عدد حقيقي $1<x<5$ لدينا $x^2-6x+5<0$
و من اجل كل عدد حقيقي $x<1$ لدينا $x^2-6x+5>0$
ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=-\infty$
- من أجل كل عدد حقيقي $x>5$ لدينا $x^2-6x+5>0$
ومن اجل كل عدد حقيقي $1<x<5$ لدينا $x^2-6x+5<0$

ومنه $\lim_{x \xrightarrow{<} 5} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 5} f(x) = +\infty$

(2 $\lim_{x\to 2}(x^3-8) = \lim_{x\to 2}(x^4-16)=0$ إذن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

من اجل $x \neq 1$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$

إذن $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{15}{7}$

(3 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-2} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x(x-2) = +\infty$

إذن نهاية $f$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}}{x(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)}{x(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-2}} = 0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x-2} = +\infty$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = +\infty$ لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} 2} x\sqrt{x-2} = 0^+$

(4
$$\begin{cases} |x^2-x| = -x^2+x\ ,\ x\in[0\ ,\ 1] \\ |x^2-x| = x^2-x\ ,\ x\in\,]-\infty\ ,0]\cup[1,+\infty[ \end{cases}$$

و منه الدالة $f(x)$ تكتب:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2+x-2}\ ,\ x\in[0,1] \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2}\ ,\ x\in\,]-\infty\ ,\ 0]\ U\ [1\ ,\ +\infty[ \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{-x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{-x}{x+2} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$$





## تطبيق 3 حساب النهايات لدوال جذرية

احسب نهاية الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$ عند $+\infty$

جـ) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$ ، د) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$ عند 1

### الحل

أ) $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty-\infty$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$

جـ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x}}{x}} = 1$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x} = 0$

د) $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(3-\sqrt{5x+4})(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(9-5x-4)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(3+\sqrt{5x+4})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(-5)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(3+\sqrt{5x+4})} = \lim_{x\to 1}\frac{-5(\sqrt{x+3}+2)}{3+\sqrt{5x+4}} = -\frac{10}{3}$$

## تطبيق 4

### حساب النهايات لدوال مثلثية

احسب نهاية الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

ا) $f(x)=\frac{\sin 6x}{x}$ عند 0 ، ب) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ عند 0 و عند $+\infty$

جـ) $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ عند 0 ، د) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ عند 0

**✓ الحل**

ا) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{6x}=6\lim\frac{\sin 6x}{6x}=6\times 1=6$$

ب) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x}\sin 2x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}2\sqrt{x}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=0\times 1=0$$

- من اجل كل عدد حقيقي موجب $x$ لدينا $1\ge\sin(2x)\ge -1$

و منه $\frac{-1}{\sqrt{x}}\le\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ و بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}}=0$

فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

جـ) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ و $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}2\cos\frac{x}{2}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}=2$

لأن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ و $\lim_{x\to 0}2\cos\frac{x}{2}=2$

د) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$





## تطبيق 5

### حساب النهايات

عين نهاية الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\frac{5x-2}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم اوجد المجال $I$ بحيث إذا كان $x$ ينتمي إلى $I$ فإن $f(x)>10^2$

**✓ الحل**

$\lim_{x\to 1}(5x-2)=3$ و $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0^+$ و منه $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$

$f(x)>10^2$ يكافئ $\frac{5x-2}{(x-1)^2}>10^2$ يكافئ $10^2x^2-205x+102<0$

$\Delta=(205)^2-4\times 100(102)=1225$

$x_1=\frac{205+35}{100}=\frac{240}{100}=2,4$ ، $x_2=\frac{205-35}{100}=\frac{170}{100}=1,7$

| $x$ | $-\infty$ | | 1,7 | | 2,4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^2x^2-205x+102$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

حتى يكون $10^2x^2-205x+102<0$ يجب ان يكون $x\in]1,7 ; 2,4[$ أي $1,7<x<2,4$

إذن المجال $I=]1,7 ; 2,4[$

## تطبيق 6

### حساب النهايات باستعمال الحصر

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث انه من اجل كل $x$ لدينا $1\le f(x)\le 2$ ..... (I)

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x)=\frac{3f(x)+5}{x^3}$

اعط حصرا لـ $g(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

**✓ الحل**

بضرب المتباينة $(I)$ بالعدد 3 نجد $3\le 3f(x)\le 6$ و بإضافة 5 إلى حدود هذه الأخيرة نجد

$8\le 3f(x)+5\le 11$ ... $(II)$

بقسمة حدود المتباينة $(II)$ على العدد الموجب تماما $x^3$ نجد $\frac{8}{x^3}\le g(x)\le\frac{11}{x^3}$

و بقسمة حدود المتباينة $(II)$ على العدد السالب تماما $x^3$ نجد $\frac{11}{x^3}\le g(x)\le\frac{8}{x^3}$

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{11}{x^3}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x^3}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

بما ان $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{11}{x^3}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

## تطبيق 7 حساب النهايات باستعمال الحصر

$f$ دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{x}$

1) تحقق من ان $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2) استنتج أن $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ ثم احسب نهاية $f$ عند $+\infty$

### ✓ الحل

1) $$f(x)=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})}=\frac{(2+x)-(x)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$$

2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x}$ اي $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge 2\sqrt{x}$

و منه $f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ ... (1)

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+2}$

و منه $f(x)\ge\frac{2}{2\sqrt{x+2}}$ اي $f(x)\ge\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

- بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

## تطبيق 8 حساب النهايات باستعمال الحصر

$f$ دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x+\sin x}{3-\cos x}$

1) بين ان $\frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\cos x}\le\frac{1}{2}$ ... (I)

2) استنتج حصرا لـ $f(x)$ من اجل كل $x$ ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$





### ✓ الحل

1) نعلم أن من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $-1\le-\cos x\le 1$

بإضافة 3 إلى حدود المتباينة الأخيرة نجد $2\le 3-\cos x\le 4$ و بالقلب نجد:

$\frac{1}{2}\ge\frac{1}{3-\cos x}\ge\frac{1}{4}$ ............ (1)

2) بإضافة $2x$ إلى حدود المتباينة $1\ge\sin x\ge-1$ نجد:

$1+2x\ge 2x+\sin x\ge-1+2x$ ......... (2)

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$\frac{1}{2}(1+2x)\ge\frac{2x+\sin x}{3-\cos x}\ge\frac{1}{4}(-1+2x)$$

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}(-1+2x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

## تطبيق 9 دراسة وضعية المنحني بالنسبة إلى مستقيم مقارب

ادرس النهايات عند $-\infty$ ، $+\infty$ و $-2$ للدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\frac{3x}{x+2}$

ثم حدد وضعية المستقيم المقارب الأفقي بالنسبة إلى المنحنى الدالة $f$.

### ✓ الحل

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}\frac{3x}{x+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{3x}{x+2}=-\infty$

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ فإن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=3$ مقارب أفقي لـ $(C_f)$

و لدراسة وضعية $(d)$ بالنسبة إلى $(C_f)$ ندرس إشارة $f(x)-y$ على $D_f$

$$f(x)-y=f(x)-3=\frac{3x}{x+2}-3=\frac{3x-3x-6}{x+2}=\frac{-6}{x+2}$$

- إذا كان $-2<x$ فإن $\frac{-6}{x+2}<0$

و منه المنحني $(C_f)$ يقع تحت المستقيم $(d)$

- إذا كان $x<-2$ فإن $\frac{-6}{x+2}>0$

و منه المنحني $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(d)$

## تطبيق 10 حساب النهايات باستعمال الدالة المركبة

احسب نهايات الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$ عند 5 ، 2) $f(x)=\cos\pi x+\frac{1}{(x-2)^2}$ عند 2

3) $f(x)=(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1})^3$ عند $+\infty$ ، 4) $f(x)=\sin(\frac{\pi x+2}{2x+3})$ عند $-\infty$

### الحل ✓

1) نضع $X=\frac{x+2}{x-4}$ و منه $f(x)=\sqrt{X}$

$\lim_{x\to5} X=\frac{7}{1}=7$ و منه $\lim_{x\to5} f(x)=\sqrt{7}$

2) $\lim_{x\to2}\cos\pi x=1$ و $\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

وحسب قواعد العملية لجمع النهايات نجد $\lim_{x\to2} f(x)=1+\infty=+\infty$

3) نضع $X=x-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$ منه $f(x)=X^3$

$$\lim_{x\to+\infty} X=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{(x-1)x}\right)=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)x}=0$

و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} X^3=+\infty$

4) بوضع $X=\frac{\pi x+2}{2x+3}$ فيكون $\lim_{x\to-\infty} X=\lim\frac{\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

## تطبيق 11 تعيين عبارة دالة

$f$ دالة معرفة بالعبارة $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$ و $(C_f)$ منحناها البياني

عين الأعداد الحقيقية $a, b, c$ بحيث المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقاربا عموديا و يقبل عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=3x-4$ و يمر بالنقطة $A(2,3)$





### الحل ✓

المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقاربا له هذا معناه ان $4-d=0$ اي $d=4$

بما ان $y=3x-4$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لـ $(C_f)$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=3$

و بما ان $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ فإن $a=3$

بما ان $\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-3x)=b$ و $\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-3x)=-4$ فإن $b=-4$

$A(2,3)$ تنتمي إلى $(C_f)$ هذا معناه $f(2)=3$

$f(2)=3$ يكافئ $2a+b+\frac{c}{2-d}=3$ يكافئ $c=-2$

لذن $f(x)=3x-4-\frac{2}{x-4}$

## تطبيق 12 تعيين معادلة المستقيم المقارب المائل لمنحني

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ و $(C_f)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) اثبت ان $(d)$ ذا المعادلة $y=x+1$ مقاربا مائلا لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ $(C_f)$ و $(d)$

2) هل المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(-\infty)$

### الحل ✓

1) أ) $(d)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1=0$$

اذن $(d)$ هو مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$

ب) لدراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(d)$ ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x+1)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$

نلاحظ انه إذا كان $x\le0$ فإن $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1\le0$ و في هذه الحالة المنحنى $(C_f)$ يقع تحت $(d)$

- إذا كان $x > 0$ فإن $f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{-9}{(x+\sqrt{x^2+9})\sqrt{x^2+9}}$

بما ان $x+\sqrt{x^2+9} > 0$ و $\sqrt{x^2+9} > 0$ فإن $f(x)-(x+1) < 0$

ومنه المنحني $(C_f)$ يقع تحت $(d)$

2) نلاحظ انه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x)=-f(x)$

اي ان $f$ فردية وبالتالي نظير المستقيم $(d)$ بالنسبة إلى مبدا المعلم هو $d' : y=x-1$

إذن $y=x-1$ هي فعلا معادلة المستقيم المقارب المائل لـ $(C_f)$ في جوار $(-\infty)$

## تطبيق 13 تعيين المنحنى المقارب لمنحني

$f$ دالة معرفة على $]-1 , +\infty[$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}$

و $(C_f)$ منحناها البياني أوجد معادلة منحنى مقارب لـ $(C_f)$ ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى $(C_f)$

✓ الحل

لما $x$ يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تسلك سلوك $\dfrac{x^4}{x^2}$ اي $x^2$ و لا تسلك سلوك $ax+b$

إذن لا يمكن ايجاد مستقيم مقارب من الشكل $y=ax+b$ لـ $(C_f)$ و عليه ندرس $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}-x^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x^2-2)\right]=0$

و منه نستنتج ان المنحني ذا المعادلة $y=x^2-2$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$

بما ان $f(x)-(x^2-2)=\dfrac{-1}{x^2+1}$ و $\dfrac{-1}{x^2+1} < 0$ فإن $(C_f)$ يقع تحت المنحنى المقارب.

## تطبيق 14 تعيين المستقيمات المقاربة لمنحن

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{|9x^2-1|}$ و تمثيلها البياني $(C_f)$

1) حدد نهايات $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-4x)$ ، ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)$

جـ) استنتج ان $(C_f)$ له مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما ؟





✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{|9x^2-1|})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x+|x|\sqrt{\left|9-\dfrac{1}{x^2}\right|}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\sqrt{\left|9-\dfrac{1}{x^2}\right|}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{|9x^2-1|})=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+|x|\sqrt{\left|9-\dfrac{1}{x^2}\right|}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x\sqrt{\left|9-\dfrac{1}{x^2}\right|}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{\left|9-\dfrac{1}{x^2}\right|}\right)=+\infty$

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-4x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{(9x^2-1)}-4x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+\sqrt{(9x^2-1)}$

$-3x+\sqrt{9x^2-1}=\dfrac{(-3x+\sqrt{9x^2-1})\times(-3x-\sqrt{9x^2-1}}{(-3x-\sqrt{9x^2-1})}$

$=\dfrac{9x^2-9x^2+1}{-3x-\sqrt{9x^2-1}}=\dfrac{1}{-3x-\sqrt{9x^2-1}}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-3x-\sqrt{x^2-1}}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{-1+9x^2}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{1+9x^2})$

لدينا $3x+\sqrt{-1+9x^2}=\dfrac{(3x+\sqrt{-1+9x^2})(3x-\sqrt{-1+9x^2})}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}=\dfrac{+1}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}$

وعليه $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{+1}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}=0$

جـ) من (ب) و (جـ) نستنتج ان $(C_f)$ له مستقيمين مقاربين مائلين هما :

$(d_1): y=-2x$ في جوار $(-\infty)$ و $(d_2): y=4x$ في جوار $(+\infty)$

## تطبيق 15 تعيين حلول معادلة

$f$ دالة معرفة على $I=[0 , 3]$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

1) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ على $I$ ثم عين $f(I)$

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{4}$ على $I$ ؟

✓ الحل

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $[0\ ,\ 3]$ و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$ و منه :

من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x) < 0$ و بالتالي الدالة $f$ متناقصة تماما على $I$

$f(0)=\frac{1}{2}$ و $f(3)=\frac{1}{5}$

| $x$ | $0$ | $3$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | |
| $f(x)$ | $0{,}5$ ↘ | $\frac{1}{5}$ |

من جدول تغيرات $f$ نستنتج ان

$f(I)=\left[\frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{2}\right]$

2) بما ان الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تماما على $I$ و $\frac{1}{4}$ ينتمي الى $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]$ فإن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha$ للمعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$

## تطبيق 16 تعيين حلول معادلة

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة التالية $f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

1) احسب $f(-1)\ ,\ f(\frac{-1}{2})\ ,\ f(0)\ ,\ f(1)$

2) استنتج ان للعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول حقيقية على المجال $[-1,1]$

✓ الحل

1) $f(-1)=\frac{-3}{2}\ ,\ f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ ,\ f(0)=\frac{-1}{2}\ ,\ f(1)=\frac{1}{2}$

2) الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[-1,1]$ لأنها دالة كثيرة حدود

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $[-1,1]$ و لدينا $f'(x)=12x^2-3$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=\frac{1}{2}$ او $x=-\frac{1}{2}$

$f'(x)$ ينعدم عند $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ مغيرا إشارته بجوارهما و بالتالي $f$ ليست رتيبة على المجال $[-1,1]$

$f(-1)\times f(-\frac{1}{2}) < 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha$ على المجال $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ للمعادلة $f(x)=0$





$f(-\frac{1}{2})f(0) < 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\beta$ على المجال $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ للمعادلة $f(x)=0$

- $f(0)f(\frac{1}{2}) < 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\gamma$ للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $[0,1]$ و بالتالي نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول في $[-1,1]$

## تطبيق 17 دراسة استمرار دالة

$f$ دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x^2\cos\frac{1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2) هل الدالة $f$ مستمرة عند الصفر على $\mathbb{R}$ ؟

✓ الحل :

1) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ لدينا $-1\leq\cos\frac{1}{x}\leq 1$ ومنه $-x^2\leq x^2\cos\frac{1}{x}\leq x^2$

و بما ان $\lim\limits_{x\to 0} x^2=\lim\limits_{x\to 0} -x^2=0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

2) بما ان الدالة $f$ معرفة عند الصفر و $f$ لها نهاية وحيدة عند الصفر فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ وعليه فإن الدالة $f$ مستمرة عند 0

الدالتان $x\xrightarrow{g}\frac{1}{x}$ و $x\xrightarrow{h}\cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}^*$

و بالتالي الدالة المركبة $hog$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$ $(hog\,(x)=\cos\frac{1}{x})$

الدالة $x\to x^2$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$

إذن جداء الدالتين $x\to x^2$ و $hog$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$ و عليه فإن $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

# تمارين و مسائل

**1-** احسب نهايات الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=-x^4+5$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) $f(x)=-x^4-x^2-x+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) $f(x)=\frac{-x+5}{2x+1}$ عند $+\infty , -\infty , -\frac{1}{2}$

4) $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$ عند $-\infty , +\infty$

5) $f(x)=-5x+4+\frac{1}{2x+1}$ عند $-\infty , +\infty , -\frac{1}{2}$

6) $f(x)=\frac{3x^2}{(x-3)(1-x)}$ عند $-\infty , +\infty , 1 , 3$

7) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{(x-1)(4-x)}$ عند $-\infty , +\infty , 1 , 4$

**2-** احسب نهايات الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{x+3}{2x^2+x-1}$ عند $-\infty , +\infty , -1 , +\frac{1}{2}$

2) $f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ ، $-2$ ، $2$

3) $f(x)=\frac{x-3}{x\sqrt{x-3}}$ عند $+\infty , 3$

4) $f(x)=\frac{|x|(x-1)}{x^2+|x|-2}$ عند $+\infty , -\infty , -1 , 1$

**3-** أدرس نهايات الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ عند $-\infty , +\infty$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+4}-2x+1$ عند $-\infty , +\infty$

3) $f(x)=\frac{-x+1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}-2}$ عند $0$ ، $+\infty$





**4-** $f$ و $g$ دالتان معرفتان على $]-\infty , -2] \cup [2 , +\infty[$ بالعبارتين :

$f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}+x$

برهن أن $f(x)\times g(x)=-4$ وما هي نهاية $g$ عند $(+\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية $f$ عند $(+\infty)$ ؟ وما هي ايضا نهاية $f$ عند $(-\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية $f$ عند $(-\infty)$ ؟

**5-** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{x^4-2x^2+3}{x^2}$ بين الجمل الصحيحة من الخاطئة برر ذلك :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ، ب) الدالة $f$ زوجية ، جـ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

د) $f(x)>0$ من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم ، هـ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$

**6-** احسب نهايات الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{\tan(x)}{x}$ عند $0$ ، 2) $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ عند $0$

3) $f(x)=\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ عند $0$ مع $\alpha$ و $\beta$ حقيقيان غير معدومين

4) $f(x)=\frac{\tan x+\sin x}{x^3}$ عند $0$ ، 5) $f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}$ عند $0$

**7-** احسب نهاية الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ عند $\frac{\pi}{2}$

2) $f(x)=\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ عند $0$

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$ عند $0$

4) $f(x)=\frac{1}{\cos 2x}-\tan 2x$ عند $\frac{\pi}{4}$

**8-** بين أن $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}$ ثم استنتج نهاية الدالة $x\to\frac{1-\cos x}{x^2}$ عند $0$

**9-** أوجد نهاية الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند $1$ ثم أوجد عددا حقيقيا $\alpha$ بحيث إذا كان $x\in]1-\alpha , 1+\alpha[$ فإن $f(x)>10^3$

**10-** عين نهاية الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\frac{6x-1}{4x-1}$ عند $+\infty$

ثم اوجد عددا حقيقيا $A$ بحيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x)\in ]1,4\ ,\ 1,6[$

**11-** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^2 x-x+1$

1) لماذا لا يمكن تطبيق القواعد العملية في حساب نهايات $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ؟

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $-x+1\le f(x)\le -x+2$

ثم استنتج نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$

**12-** بين انه من اجل كل $x > -1$ لدينا $\frac{-1}{x+1} < \frac{\cos x}{x+1} < \frac{1}{x+1}$

ثم استنتج نهاية الدالة $x\to\frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$

**13-** $f$ دالة معرفة على $]2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{3x+\cos x}{x-2}$ بين انه من اجل كل $x > 2$ لدينا $\frac{3x+1}{x-2}\ge f(x)\ge\frac{3x-1}{x-2}$ ثم استنتج نهاية $f$ عند $+\infty$

**14-** $f$ دالة بحيث من اجل كل $x > 0$ ، $f(x)\ge\frac{1}{3}x^2+1$ ما هي نهاية $f$ عند $(+\infty)$ ؟

**15-** عين نهاية الدوال $f$ ، $g$ ، $h$ عند $-\infty$ و $+\infty$ باستعمال نظرية الحصر

$h(x)=-x+1+\sin x$ ، $g(x)=x^2+3+\cos x$ ، $f(x)=\frac{\cos x}{x^2+1}$

**16-** $f$ دالة بحيث من اجل كل $x\ge 0$: $|f(x)-4|\le\frac{2}{x+1}$ ما هي نهاية $f$ عند $+\infty$ ؟

**17-** ادرس النهايات عند $-\infty, +\infty, -\frac{1}{2}$ للدالة $f$ المعرفة $f(x)=\frac{-3x}{2x+1}$

ثم حدد معادلات المستقيمات المقاربة و كذا الوضعية النسبية للمنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

**18-** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و $(C_f)$ منحناها البياني في معلم معطى و $(d)$ مستقيم معادلته $y=x-3$ عين الجمل الصحيحة من بين الجمل الآتية :





ا) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$ فإن $(d)$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

ب) إذا كان $(d)$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $(+\infty)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ج) إذا كان $(d)$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $(-\infty)$ فإن $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=+\infty$

د) إذا كان $(d)$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $(-\infty)$ فإنه $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=0$

هـ) إذا كان $(d)$ مقارب لـ $(C_f)$ فإن $f(x)$ يمكن كتابته بالشكل التالي :

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+x-2}{x^2+1}$$

**19-** $f$ دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$ و منحناها البياني $(C_f)$.

اوجد منحنى مقارب لـ $(C_f)$ ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى $(C_f)$.

**20-** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

1) احسب نهاية $f$ عند $-\infty, +\infty$

2- أ) اكتب $4x^2-4x+3$ على الشكل النموذجي

ب) أدرس النهاية عند $-\infty$ و $+\infty$ للدالة $g$ المعرفة بـ $g(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$

ج) استنتج ان المنحنى الممثل للدالة $f$ له مستقيمان مقاربان مائلان يطلب تعيينهما ثم بين ان $(C_f)$ يقع فوق كل منهما.

**21-** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=-x^3+3x+1$

1) ادرس تغيرات الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها

2) برهن ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في كل مجال من المجالات التالية :

$[-2,-1]$ , $[-1,1]$ , $[1,2]$

**22-** إليك جدول تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+3x^2-2$

لماذا للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول مختلفة على $\mathbb{R}$ ؟

**23-** 1) بين ان المعادلة $-x^3-x+4=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$

اعط حصرا لهذا الحل بتقريب 0.001

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $a$ المعادلة $-x^3-x+4=a$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}$

**24** - لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=2\sin x-x$

إذا علمت أنها متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

استنتج عدد حلول المعادلة $\sin x=\frac{x}{2}$ على المجال $[0,\pi]$ ثم على المجال $[-\pi,0]$

ثم بين أن هذه الحلول وحيدة في $\mathbb{R}$

**25** - $f$ دالة معرفة بـ
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ,\ x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

1) ما هي القيم التي يأخذ ها $\alpha$ حتى تكون الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

**26** - $f$ دالة مستمرة على المجال $[0,1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $I$ لدينا $f(x)\in I$

$g$ الدالة المعرفة على $I$ بـ $g(x)=f(x)-x$

بتطبيق نظرية القيم المتوسطة على الدالة $g$ بين أنه يوجد عدد حقيقي $a$ من $I$ بحيث $f(a)=a$ .







الدرس 3

# الاشتقاقية ودراسة الدوال

## 1 - تعاريف (تذكير)

$D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

### 1 - 1 العدد المشتق و الدالة المشتقة

**تعريف 1**

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ و $a$ عدد منه

عندما نقول أن $\ell$ هو العدد المشتق للدالة $f$ عند $a$ نعني أن أحد الشرطين التاليين محقق.

**الشرط الأول :**

الدالة $h\mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لها نهاية $\ell$ عند 0.

**الشرط الثاني :**

الدالة $x\mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية $\ell$ عند $a$.

و نرمز إلى العدد المشتق لـ $f$ عند $a$ بـ $f'(a)$

إذا قبلت الدالة $f$ عددا مشتقا عند $a$ نقول أن $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$.

و إذا كانت الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند كل عدد من مجال $I$ محتوى في $D_f$

نقول أن $f$ قابلة للاشتقاق على $I$.

**تعريف 2**

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ . الدالة المشتقة للدالة $f$ على المجال $I$ هي الدالة التي نرمز لها بـ $f'$ و التي ترفق بكل $x$ من $I$ العدد $f'(x)$

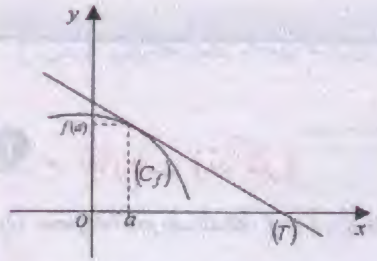
**ملاحظة**

1) يمكن كتابة $f'(x)=\frac{df}{dx}$ و تسمى الكتابة التفاضلية لـ $f'$ .
2) تعريف $f'$ ليس مقتصرا على مجال واحد بل يمكن تعريفها على اتحاد مجالات.

**مثال -**

الدالة المشتقة للدالة $x \xrightarrow{f} \frac{1}{x}$ المعرفة على $D_f = ]-\infty, 0[\cup]0,+\infty[$ هي الدالة $f'$ حيث $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ .

## 1 - 2 المماس لمنحني عند نقطة

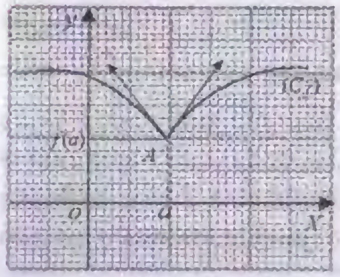



$f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ يشمل $a$
المماس للمنحني $(C_f)$ عند النقطة $A(a, f(a))$ هو المستقيم $(T)$ المار بـ $A$ و معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته هي:
$y = f'(a)(x-a)+f(a)$ .

## 1 - 3 المشتق من اليمين و من اليسار عند عدد معين

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ يشمل $a$

- إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية $\ell_1$ من اليمين عند $a$ نقول ان $f$ قابلة للاشتقاق من اليمين عند $a$ .
- إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية $\ell_2$ من اليسار عند $a$ نقول ان الدالة $f$ قابلة للاشتقاق من اليسار عند $a$ .




**التفسير الهندسي**

التمثيل البياني للدالة $f$ يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a, f(a))$ معامل توجيهه $\ell_1$ و يقبل ايضا نصف مماس من اليسار عند $A$ معامل توجيهه $\ell_2$ .





إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $a$ و النقطة $A$ تسمى نقطة زاوية.

**مثال -**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{3x+2}{|x-1|+3}$

1) ادرس قابلية اشتقاق $f$ على يمين 1 ، ثم اكتب معادلة نصف للماس $(T_1)$ .
2) ادرس قابلية اشتقاق $f$ على يسار 1 ، ثم اكتب معادلة نصف المماس $(T_2)$ .

**الحل ✓**

1) لمعرفة إن كانت $f$ قابلة للاشتقاق على يمين 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ تقبل نهاية حقيقية لما $x$ يؤول إلى 1 بقيم اكبر.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{3x+2}{x+2}-\frac{5}{3}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{9x+6-5x-10}{3(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{4(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{4}{3(x+2)} = \frac{4}{9}$$

النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية على يمين الواحد وبالتالي $f$ قابلة للاشتقاق من اليمين عند 1 و العدد المشتق من اليمين هو $\ell_1=\frac{4}{9}$ .

و معادلة نصف المماس لـ $(C_f)$ على يمين $A$ هي:

$$(T_1): y = \frac{4}{9}(x-1)+\frac{5}{3} \quad , \quad x \geq 1$$

2) لمعرفة إن كانت $f$ قابلة للاشتقاق على يسار 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية لما $x$ يؤول إلى 1 من اليسار.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{3x+2}{-x+4}-\frac{5}{3}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{14}{3(-x+4)} = \frac{14}{9} = \ell_2$$

النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية على يسار 1 بالتالي $f$ قابلة للاشتقاق من اليسار عند 1 و العدد المشتق من اليسار هو $\ell_2 = \frac{14}{9}$ .

و معادلة نصف المماس لـ $(C_f)$ على يسار $A$ هي:

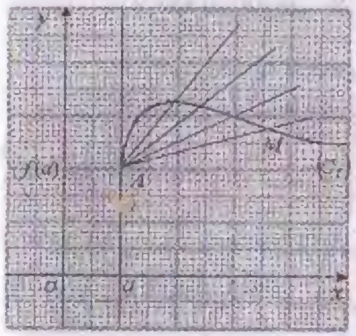
$$(T_2): y = \frac{14}{9}(x-1)+\frac{5}{3} \quad , \quad x \leq 1$$

بما ان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 1 و النقطة $A(1,\frac{5}{3})$ هي نقطة زاوية.

## 1 - 4 المماس العمودي لمنحن

إذا كانت $f$ مستمرة عند $a$ و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$

فإن المنحني $(C_f)$ يقبل مماس عمودي عند النقطة $A(a\,,\,f(a))$.




• **التفسير الهندسي**

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ حيث $f$ مستمرة عند $a$

تعني أن معاملات توجيه المستقيمات المارة من $A$ و القاطعة لـ $(C_f)$ تؤول إلى $(+\infty)$.

إذن هذه المستقيمات تؤول إلى المستقيم ذي المعادلة $x=a$.

**مثال -**

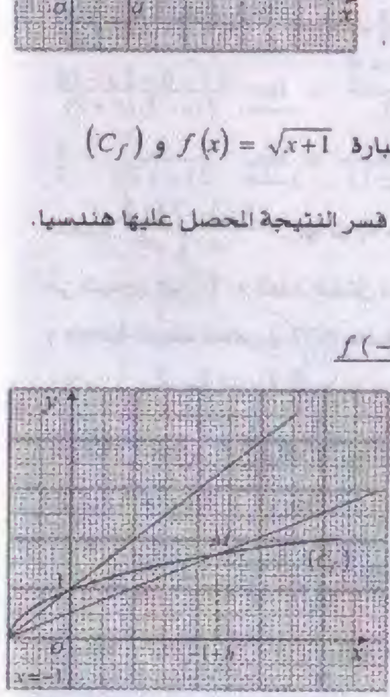
$f$ دالة معرفة على المجال $[-1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $(C_f)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $-1$ ، ثم فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا.

**✓ الحل**

من اجل $h>0$ لدينا $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$

و $\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$




إذن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $-1$.

و بما ان النسبة تؤول إلى $(+\infty)$ لما $h$ يؤول إلى الصفر فإن معامل توجيه المستقيم $(AM)$ يصبح كبيرا جدا.

إذن المماس لـ $(C_f)$ عند $A(-1,0)$ عمودي و معادلته هي $x=-1$.

## 1 - 5 التقريب التآلفي و طريقة أولر

**خاصية**

إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق عند $x$ من $I$ فإنه توجد دالة $\varepsilon$ بحيث من اجل كل عدد حقيقي $h$ مع $x+h\in I$.





لدينا $f(x+h)=f(x)+h\times f'(x)+h\,\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$.

نتحصل هكذا على التقريب $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ لما $h$ يقترب من الصفر.

نسمي $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من اجل $h$ صغير جدا.

**الإثبات**

ليكن $x$ عددا حقيقيا من $I$ ، بما ان $f$ قابلة للاشتقاق عند $x$ فإن

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

بوضع $\varepsilon(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ يكون :

$\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=f'(x)-f'(x)=0$ ينتج مما سبق :

$f(x+h)-f(x)=h\times f'(x)+h\,\varepsilon(h)$ ......... (1)

بوضع $\Delta x=x+h-x=h$

و $\Delta y=f(x+h)-f(x)$

العلاقة (1) تكتب:

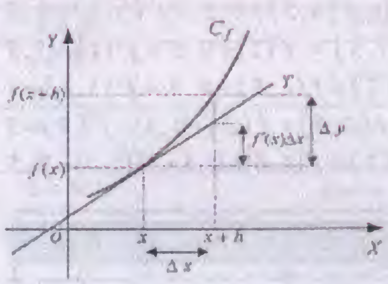
$\Delta y=(\Delta x)f'(x)+(\Delta x)\,\varepsilon(\Delta x)$

و منه التقريب $\Delta y\approx(\Delta x)f'(x)$

هذا التقريب يقودنا إلى الكتابة الرمزية

$dy=f'(x)dx$

و تسمى هذه الأخيرة بالكتابة التفاضلية.




**طريقة أولر**

في كثير من المسائل يحدث و أن نعرف الدالة المشتقة $f'$ للدالة $f$ و قيمة لـ $f$ عند عدد (شرط أولي $y_0=f(x_0)$) بدون معرفة العبارة الصريحة لـ $f$.

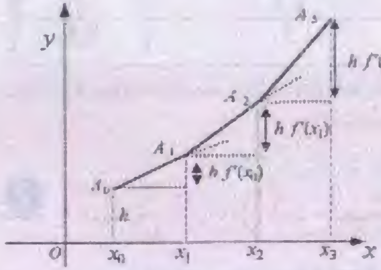
تسمح لنا طريقة أولر بإنشاء منحنى تقريبي للدالة $f$.

لذلك نعتمد على فكرة انه من أجل $h$ قريب من الصفر يكون $f(x+h)$ قريب من $f(x)+h\times f'(x)$.

بما أن لدينا $f(x_0)=y_0$ نستطيع أن نعلم نقطة من المنحنى البياني لـ $f$ و هي $A_0(x_0,y_0)$.

نختار عددا حقيقيا $h$ غير معدوم و قريب من الصفر و بما أننا نعرف $f'(x_0)$ ننشئ النقطة $A_1$ ذات الفاصلة $x_1=x_0+h$ التي تنتمي إلى المستقيم المار من $A_0$ و معامل توجيهه $f'(x_0)$ يكون ترتيبها $y_1=f(x_0)+h\times f'(x_0)$

بما أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ لما $h$ يقترب من الصفر فإن $A_1$ قريبة من $(C_f)$.



بنفس الطريقة و ابتداء من $A_1$ نستطيع إنشاء النقطة $A_2(x_1+h\ ,\ f(x_1)+h f'(x_1))$
و هكذا نعلم النقط $A_n$ التي إحداثياتها $x_n = x_{n-1}+h$ و $y_n = f(x_{n-1})+h f'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$.
وتسلسل القطع $[A_0 A_1]$ ، $[A_1 A_2]$ ،... يعطي لنا تمثيلا بيانيا مقربا لـ $(C_f)$ و هذا التمثيل متعلق بالخطوة $h$ و كلما كانت $h$ صغيرة جدا كلما كان المنحنى دقيقا بالقدر الكافي.

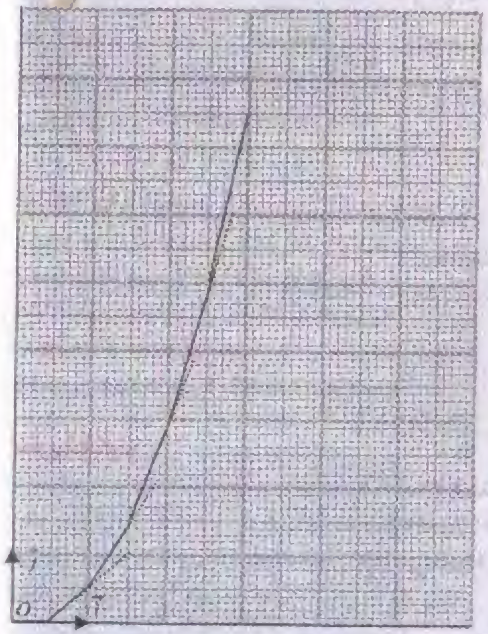
مثال -

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(0)=0$ و $f'(x)=2x$ ، باستعمال طريقة أولر و بأخذ خطوة $p=0,5$ انشئ جدول القيم المقربة لـ $f(x)$ من اجل كل $x$ من $[0,3]$
ثم انشئ منحنى تقريبي لـ $f$ على هذا المجال.

✓ الحل

$f(0,5)=f(0)+0,5\times f'(0)=0$
$f(1)=f(0,5)+0,5\times f'(0,5)=0,5$
$f(1,5)=f(1)+0,5\times f'(1)=1,5$
$f(2)=f(1,5)+0,5\times f'(1,5)=3$
$f(2,5)=f(2)+0,5\times f'(2)=5$
$f(3)=f(2,5)+0,5\times f'(2,5)=7,5$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,5 | 0 |
| 1 | 0,5 |
| 1,5 | 1,5 |
| 2 | 3 |
| 2,5 | 5 |
| 3 | 7,5 |




## 2 - مشتق الدوال المرجعية



### 1 - 2 عمليات على الاشتقاق

مبرهنة

$U$ و $V$ دالتان قابلتان للاشتقاق على $D$ ( $D$ مجال أو إتحاد مجالات) و $k$ عدد حقيقي
إذن الدوال $kU$ ، $U+V$ و $U\times V$ قابلة للاشتقاق على $D$ و لدينا:





$(kU)' = kU'$ ؛ $(U+V)' = U'+V'$ و $(U\times V)' = U'V+U\times V'$

و اذا كانت $V$ غير معدومة على $D$ فإن $\frac{U}{V}$ و $\frac{1}{V}$ قابلتان للاشتقاق على $D$ و لدينا ؛

$(\frac{1}{V})' = \frac{-V'}{V^2}$ و $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V-V'U}{V^2}$

ملاحظة

الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

جدول مشتقات الدوال الشهيرة.

| الدالة | الدالة المشتقة | تعاليق |
|---|---|---|
| $x \mapsto k$ (ثابت) | $x \mapsto 0$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x$ | $x \mapsto 1$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ | $x \in \mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto x^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ | $x \mapsto n x^{n-1}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$ مع $n \in \mathbb{Z}^*$ | $x \mapsto n x^{n-1}$ | $x \in \mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x \in ]0,+\infty[$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto -\sin x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ | $x \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1$ | $x \in \mathbb{R}$ |

تمرين تدريبي

من اجل كل دالة من الدوال التالية عين مجموعة تعريفها و مجموعة تعريف دالتها المشتقة ثم عين دالتها المشتقة ؛

1) $f(x) = 2x^3+5x-1$ ، 2) $g(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+3x}$

3) $h(x) = \frac{1}{x^2-x+3}$ ، 4) $k(x) = x^2 \sin x$

✓ الحل

1) الدالة $f$ هي دالة كثيرة حدود معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = 6x^2+5$
2) الدالة $g$ معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2+3x \neq 0$.

$x^2+3x\neq 0$ يكافئ $(x\neq 0)$ و $(x\neq -3)$ و منه $D_f=\mathbb{R}-\{0,-3\}$

و بما ان $g$ دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على $D_g$ و من اجل كل $x$ من $D_g$ لدينا :

$$g'(x)=\frac{(4x-1)(x^2+3x)-(2x+3)(2x^2-x+1)}{(x^2+3x)^2}=\frac{7x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$$

3) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $x^2-x+3\rangle 0$ و منه مجموعة تعريف الدالة $h$ هي $\mathbb{R}$

و بما ان الدالة $h$ ناطقة فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $h'(x)=\dfrac{-(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

4) الدالتان $x\xrightarrow{V}x^2$ و $x\xrightarrow{U}\sin x$ معرفتان و قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و بالتالي الدالة $K=U\times V$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $K'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$ .



## 3 - تطبيقات الاشتقاق

### 3 - 1 اتجاه التغير

**مبرهنة**

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ محتوى في $D_f$ .

- إذا كان من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x)\rangle 0$ فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على $I$ .
- إذا كان من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x)\langle 0$ فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على $I$ .
- إذا كان من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x)=0$ فإن الدالة $f$ ثابتة على $I$ .

**ملاحظة**

إذا انعدمت $f'$ عند بعض القيم من المجال $I$ و لا تغير إشارتها على $I$ فإن الدالة $f$ تحافظ على تغيراتها.

**مثال -**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^3$ .

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=3x^2$ .

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ لدينا $f'(x)\rangle 0$ و $f'(0)=0$ .

إذن الدالة $f'$ موجبة على $\mathbb{R}$ و تنعدم عند $0$ وبالتالي $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

### 3 - 2 القيم الحدية لدالة

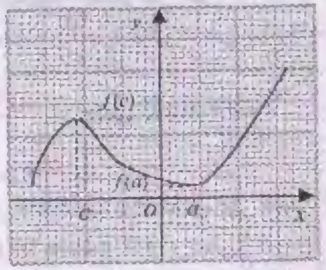
$f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ يشمل $c$ .





القول ان $f(c)$ قيمة حدية عظمى (صغرى) يعني انه نستطيع إيجاد مجال مفتوح $J$ محتوى في $I$ و يشمل $c$ بحيث من اجل كل $x$ من $J$ لدينا $f(x)\leq f(c)$ . $(f(x)\geq f(c))$

**مبرهنة**




$f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I$ يشمل $c$ .

إذا انعدمت $f'(x)$ عند $c$ مغيرة إشارتها في جوار $c$ فإن $f(c)$ هي قيمة حدية و المماس للمنحني $(C_f)$ عند النقطة $A(c,f(c))$ يكون أفقيا.

**تمرين تدريبي 1**

ادرس تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $[-2,3]$ بالشكل $f(x)=x^3-3x^2+2$ و استنتج القيم الحدية لـ $f$ على هذا المجال ثم اعط حصرا لـ $f(x)$ على المجال السابق.

**✓ الحل**

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[-2,3]$ و من اجل كل $x$ من $[-2,3]$ لدينا $f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ او $(x=2)$

إشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول المجاور

- اذا كان $x\in]0,2[$ فإن $f'(x)\langle 0$

و منه الدالة $f$ متناقصة تماما على $[0,2]$

- اذا كان $x\in]-2,0[$ او $x\in]2,3[$ فإن $f'(x)\rangle 0$

و منه الدالة $f$ متزايدة تماما على كل من المجالين $[-2,0]$ و $[2,3]$

و اليك جدول تغيرات الدالة $f$ ،

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| تغيرات الدالة $f$ | $f(-2)$ | ↗ | $f(0)$ | ↘ | $f(2)$ | ↗ | $f(3)$ |

$f(-2)=18$ ، $f(0)=2$ ، $f(2)=-2$ ، $f(3)=2$

$f(0)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة $f$ على المجال $[-2,2]$

$f(3)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة $f$ على المجال $[0,3]$

$f(-2)=-18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة $f$ على المجال $[-2,2]$

$f(2)=-2$ هي قيمة حدية صغرى للدالة $f$ على المجال $[0,3]$

$f(-2)=-18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة $f$ على المجال $[-2,3]$
العدد 2 هو قيمة حدية عظمى للدالة $f$ على مجال $[-2,3]$
و نتحصل عليها من اجل $x=0$ و $x=3$.
ومنه من اجل كل $x$ من $[-2,3]$ يكون $2 \geq f(x) \geq -18$.

## 3 - 3 حل المعادلات

**مبرهنة**

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I=[a,b]$
1) إذا كانت $f'>0$ على $[a,b]$ فإن من أجل كل $k$ من $[f(a),f(b)]$،
المعادلة $f(x)=k$ لها حل وحيد في المجال $I$.
2) إذا كانت $f'<0$ على $[a,b]$ فإن من اجل كل $k$ من $[f(b),f(a)]$،
المعادلة $f(x)=k$ لها حل وحيد في المجال $I$.

**ملاحظة**

نتائج المبرهنة تبقى صحيحة حتى و لو انعدمت $f'$ عند بعض القيم من $I$.

**تمرين تدريبي 1**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^3-3x+1$.
1) عين نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$
2) ادرس تغيرات الدالة $f$.
3) بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول ثم اعط حصرا بتقريب $10^{-3}$ للحل الذي ينتمي إلى $]-2,-1[$

**الحل ✓**

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=3x^2-3$
$f'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=-1)$.
- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $f'(x)<0$
و منه $f$ متناقصة تماما على $[-1,1]$.
- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$
و منه $f$ متزايدة تماما على كل من المجالين $]+1,+\infty[$ ، $]-\infty,-1[$





• اليك جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ | ↗ | $+3$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

• بما ان $f$ متزايدة تماما على $]-\infty,-1[$ و صورة هذا المجال هي $]-\infty,3[$ و الصفر ينتمي الى $]-\infty,3[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$
و كون $f(-2)=-1$ يكون $\alpha\in]-2,-1[$.
لتعيين حصر لـ $\alpha$ بتقريب $10^{-3}$ نتبع طريقة ديكتومي.

$m=\frac{a+b}{2}=-1,5$ و $f(m)=0,125$ إذن $\alpha\in]-2,-1,5[$

$m'=\frac{-2-1,5}{2}=-1,75$ و $f(m')=0,89$ إذن $\alpha\in]-2,-1,75[$

$m''=-1,875$ و $f(m'')=0,033$ إذن $\alpha\in]-2,-1,87[$

$m'''=-1,9375$ و $f(m''')=-0,46$ إذن $\alpha\in]-1,937;-1,87[$

• بما ان $f$ متناقصة تماما على $]-1,1[$ و صورة هذا المجال هي $]-1,3[$ و الصفر ينتمي إلى $]-1,3[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$
بنفس الطريقة نبين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1,+\infty[$
إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول.

## 4 - 3 استعمال العدد المشتق في حساب بعض النهايات

نستطيع استعمال العدد المشتق لتعيين بعض النهايات.
إذا كانت لدينا عبارة من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع $f$ دالة قابلة للاشتقاق عند $a$
فإن $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

**مثال -**

1) $g(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ، نريد حساب $\lim_{x\to 0} g(x)$.
بوضع $f(x)=\cos x$ نجد $f(0)=1$ بالتالي $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$
لكن $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر إذن $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.
من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=-\sin x$
ومنه نجد $f'(0)=0$ إذن $\lim_{x\to0} g(x)=f'(0)=0$

2) $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ نريد حساب $\lim_{x\to 0} h(x)$.

بوضع $f(x)=\sin x$ نجد $f(0)=0$ بالتالي $h(x)$ تكتب $h(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f'(x)=\cos x$

و منه نجد $f'(0)=1$ إذن $\lim_{x\to 0} h(x)=f'(0)=1$.

## 4 - مشتق دالة مركبة

### 4 - 1 نظرية أساسية

**مبرهنة**

إذا كانت $g$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $J$ وكانت $U$ دالة قابلة للاشتقاق على $I$
و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $U(x)\in J$.
فإن الدالة المعرفة بـ $f(x)=g(U(x))$ قابلة للاشتقاق على $I$
و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x)=U'(x)g'(U(x))$

**الإثبات**

لكي نبرهن على ان $f$ قابلة للاشتقاق على $I$

يجب أن نبرهن أن الدالة $h$ المعرفة بـ $h(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

لها نهاية عند $a$ هي $U'(a)g'(U(a))$ حيث $a$ كيفي من $I$

نفرض انه من اجل كل $x$ بجوار $a$ و يختلف عنه $U(x)\neq U(a)$.

و عليه من اجل كل $x$ من هذا الجوار يمكن كتابة

$$h(x)=\frac{g(U(x))-g(U(a))}{U(x)-U(a)}\times\frac{U(x)-U(a)}{x-a}$$

لكن $U$ قابلة للاشتقاق عند $a$ إذن $\lim_{x\to a}\frac{U(x)-U(a)}{x-a}=U'(a)$.

بوضع $t(x)=\frac{g(U(x))-g(U(a))}{U(x)-U(a)}$ و $U(x)=X$ يكون $t(x)=\frac{g(X)-g(U(a))}{X-U(a)}$

لكن $U$ قابلة للاشتقاق عند $a$

إذن $X=U(x)=U(a)+(x-a)U'(a)+(x-a)\varepsilon(x)$ مع $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$

إذن $\lim_{x\to a} X=U(a)$ و $\lim_{x\to a}\frac{g(X)-g(U(a))}{X-U(a)}=g'(U(a))$

لان $g$ قابلة للاشتقاق عند $U(a)$.

إذن $\lim_{x\to a} h(x)=g'(U(a))\times U'(a)$ و منه $\lim_{x\to a} f(x)=U'(a)g'(U(a))$.





**ملاحظة**

1) المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا كان $I$ و $J$ عبارة عن إتحاد مجالات

2) نستطيع كتابة $(g(U(x)))'=\frac{d(gou)}{dx}=\frac{dg}{dU}\times\frac{dU}{dx}$

**تمرين تدريبي 1**

- عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$f_1(x)=(x^2+1)^3$ ، $f_2(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، $f_3(x)=\cos\frac{1}{x}$

**الحل**

$f_1$ ، $f_2$ ، $f_3$ هي دوال مركبة من الشكل $gou$ و في كل حالة لابد من معرفة $g$ و $U$

- نضع $f_1=g_1ou_1$ حيث $g_1(x)=x^3$ و $u_1(x)=x^2+1$

الدالتان $u_1$ و $g_1$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن حسب المبرهنة السابقة الدالة $f_1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ($I=J=\mathbb{R}$).

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $u'_1(x)=2x$ و $g'_1(x)=3x^2$

إذن $f'_1(x)=2x(3)(x^2+1)^2=6x(x^2+1)^2$

- نضع $f_2=g_2ou_2$ حيث $u_2(x)=x^2+1$ و $g_2(x)=\sqrt{x}$ و $J=]0,+\infty[$ ، $I=\mathbb{R}$.

الدالة $u_2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والدالة $g_2$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل $x$ من $I$ فإن $U(x)\in J$.

من اجل كل $x$ من $J$ لدينا $g'_2(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $u'_2(x)=2x$

إذن $f'_2(x)=2x\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

- نضع $f_3=g_3ou_3$ حيث $u_3(x)=\frac{1}{x}$ و $g_3(x)=\cos x$ و $I=\mathbb{R}^*$ ، $J=\mathbb{R}$

و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ ؛ $U(x)\in J$.

الدالة $u_3$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $u'_3(x)=-\frac{1}{x^2}$.

الدالة $g_3$ قابلة للاشتقاق على $J$ و لدينا $g'_3(x)=-\sin x$.

إذن $f'_3(x)=u'_3(x)g'_3(u_3(x))=\frac{1}{x^2}\times\sin(\frac{1}{x})$

## 4 - 2 مشتق الدالة العكسية

**مبرهنة**

إذا كانت $f$ دالة مستمرة و رتيبة تماما و قابلة للاشتقاق على $I$ و كانت $f'(x)$ لا تنعدم على $I$ فإن الدالة العكسية $g$ للدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)=J$ و لدينا $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ مع $y=f(x)$.

**الإثبات**

من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $(g o f)(x)=x$

و منه من اجل كل $x$ من $I$ يكون $(g o f(x))'(x)=1$

و لكون $(g o f)'(x)=f'(x)g'(f(x))$ ينتج $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ .

بما ان $y=f(x)$ فإن $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ من اجل كل $y$ من $J$.

نرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f$ بالرمز $f^{-1}$ .

**تمرين تدريبي 1**

$f$ دالة معرفة بالعبارة $f(x)=3x^2+6x$

1) اثبت ان $f$ تقابل من المجال $]-\infty,-1]$ في المجال $]-3,+\infty[$

2) احسب بطريقتين مختلفتين $(f^{-1})'(0)$

**✓ الحل**

1) الدالة $f$ مستمرة على مجال $]-\infty,-1]$ لأنها دالة كثيرة حدود.

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود و لدينا $f'(x)=6x+6$

من اجل كل $x$ من $]-\infty,-1[$ لدينا $f'(x)<0$

و منه $f$ متناقصة تماما على $]-\infty,-1]$

بما ان $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty,-1]$

فهي تقابل من $]-\infty,-1]$ في $f(]-\infty,-1])=]-3,+\infty[$ و بالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}$

2) حساب $(f^{-1})'(0)$ باستعمال التعريف

من اجل كل $y$ من $]-3,+\infty[$ لدينا $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ حيث $y=f(x)$ .

$y=0$ معناه أن $3x^2+6x=0$ و منه نجد $x=0$ او $x=-2$

$x=0$ مرفوض لأن $0\notin]-1,+\infty[$ و بالتالي قيمة $x$ المقبولة هي $-2$.





إذن $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{-6}$

- حساب $(f^{-1})'(0)$ بتعيين عبارة $f^{-1}$

من اجل كل $x$ من $I$ و من اجل كل $y$ من $f(I)$ ،

$y=f(x)$ يكافئ $3x^2+6x-y=0$

$3x^2+6x-y=0 \quad ...(I)$

ليكن $\Delta$ مميز للمعادلة $(I)$ ذات المجهول $x$ .

$\Delta=6^2-4(3)(-y)=36+12y$

بما ان $y>-3$ فإن $\Delta>0$ وبالتالي المعادلة $(I)$ لها حلان مختلفان $x_1$ و $x_2$

حيث $x_1=\frac{-6+\sqrt{12y+36}}{6}$ ، $x_2=\frac{-6-\sqrt{12y+36}}{6}$ .

من اجل كل $y\geq 0$ يكون $x_1>0$ و بالتالي $x_1$ لا ينتمي إلى $]-\infty,-1]$ و عليه $x_2$ مقبول

إذن $x_2=f^{-1}(y)=\frac{-6-\sqrt{12y+36}}{6}$ .

الدالة $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و لدينا $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{9+3x}}$

إذن $(f^{-1})'(0)=\frac{-1}{2\sqrt{9}}=\frac{-1}{6}$

## 4 - 3 مشتق الدالة الجذرية $\sqrt{u}$ و الدالة $u^n$ مع $n\in\mathbb{Z}^*$

**مبرهنة 1**

$u$ دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال $I$ .

إن الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$

و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ .

**الإثبات**

بوضع $g(x)=\sqrt{x}$ يمكن كتابة $f$ على الشكل $gou$ و بتطبيق قاعدة مشتق الدالة المركبة نجد

$(gou)'(x)=u'(x)g'(u(x))=u'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$

**ملاحظة**

لمعرفة ان كانت الدالة $f=\sqrt{u}$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ حيث $u(x_0)=0$ ندرس نهاية النسبة $t(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما $x$ يؤول إلى $x_0$ .

**مثال -**

1) $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{x-2}$ ، $D_f=[2,+\infty[$

يمكن كتابة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $U(x)=x-2$

الدالة $u$ موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ بالتالي الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ و يبقى لنا دراسة قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0=0$

لذلك ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ لما $x$ يؤول إلى 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=+\infty$$

إذن $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0$ . وبالتالي $f$ قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$

2) $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{(x+1)^4}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

الدالة $f$ تكتب على الشكل $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $u(x)=(x+1)^4$ و $u(-1)=0$

الدالة $u$ موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و بالتالي $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ لكن $f(x)=(x+1)^2$

إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ .

**مبرهنة 2**

$u$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ و $n$ عدد صحيح غير معدوم.

إذن الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=(u(x))^n$ قابلة للاشتقاق على $I$

و لدينا $f'(x)=n\times u'(x)\times(u(x))^{n-1}$ .



**الإثبات**

- حالة $n\in\mathbb{N}$ :

بوضع $g(x)=x^n$ يمكن كتابة $f$ على الشكل $gou$

من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $g'(x)=nx^{n-1}$ و منه $g'(u(x))=nu^{n-1}(x)$ .

إذن من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x)=n(u(x))^{n-1}\times u'(x)$ .

- حالة $n$ عدد صحيح سالب و $u(x)$ غير معدوم على $I$

$$f(x)=(u(x))^n=\frac{1}{(u(x))^{-n}}$$

بما أن $-n>0$ فإن حسب الحالة الأولى،

$\left[(u(x))^{-n}\right]'=(-n)u'(x)(u(x))^{-n-1}$ و بتطبيق قاعدة مشتق القسمة نجد ،

$f'(x)=\frac{n\,u'(x)(u(x))^{-n-1}}{(u(x))^{-2n}}$ بالتبسيط نجد ،

$f'(x)=n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)$ .





**مبرهنة 3**

$u$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ .

إذن الدالتان $\cos u$ و $\sin u$ قابلتان للاشتقاق على $I$

و لدينا $(\cos u)'=-u'\sin u$ و $(\sin u)'=u'\cos u$

**الإثبات**

الدالة $\cos u$ من الشكل $v o u$ حيث $v(x)=\cos x$ ، $v$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $v'(x)=-\sin x$ منه $(\cos u(x))'=-\sin u(x)\times u'(x)$

بنفس الكيفية نثبت العلاقة الثانية

**مثال -**

$$(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$$

و $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$

**تمرين تدريبي**

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة $f$

أ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ، ب) $f(x)=(2x^2+x)^4$

جـ) $f(x)=\sin^2 x$ ، د) $f(x)=\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

**✓ الحل**

أ) يمكن كتابة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $u(x)=x^2+x+1$

الدالة $f$ معرفة إذا كان $u(x)\geq 0$

لكن من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x)\geq 0$

إذن الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

بالتالي من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

ب) يمكن كتابة $f(x)=(u(x))^4$ حيث $u(x)=2x^2+2$

الدالة $u$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=4(4x+1)(2x^2+x)^3$

جـ) يمكن كتابة $f(x) = (u(x))^2$ مع $u(x) = \sin x$

الدالة $u$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = 2(\cos x)(\sin x)$.

د) يمكن كتابة $f(x) = \frac{1}{(u(x))^2}$ مع $u(x) = x^2+x+1$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x) > 0$

الدالة $u$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = -2(2x+1)(x^2+x+1)^{-3}$

## 4 - 4 المشتقات المتتابعة لدالة

إذا كانت الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$. فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي $x$ من $I$ العدد الحقيقي $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة $f$

و إذا كانت $f'$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي $x$ من $I$ العدد الحقيقي $(f'(x))'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة $f$ و نرمز لها بـ $f''$ أو $f^{(2)}$

و هكذا إذا قبلت الدالة $f$ الاشتقاق $n$ مرة

حيث $n \geq 2$ على المجال $I$ فإن الدالة المشتقة النونية للدالة $f$ نرمز لها بـ $f^{(n)}$ و نكتب:

من أجل كل $n \geq 2$ ومن أجل كل $x$ من $I$ لدينا $f^{(1)}(x)=f'(x)$ و $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

### ملاحظة

في الحركيات لما $f(t)$ تمثل المسافة المقطوعة من طرف متحرك على خط مستقيم من اللحظة الابتدائية حتى اللحظة $t$ فإن العددين $f'(t)$ ، $f''(t)$ يمثلان على التوالي السرعة اللحظية و التسارع اللحظي للمتحرك في اللحظة $t$ حيث:

$$f'(t)=\frac{df}{dt} \quad \text{و} \quad f''(t)=\frac{d^2f}{dt^2}$$

**مثال -**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^4$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق $n$ مرة

و انه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f^{(1)}(x)=4x^3$ ، $f^{(2)}(x)=12x^2$ ، $f^{(3)}(x)=24x$ ، $f^{(4)}(x)=24$

و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ لدينا $f^{(n)}(x)=0$





## 5 - 4 نقطة الانعطاف

إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $I$

وكانت $f''(x)$ تنعدم عند $x_0$ من $I$ مغيرة إشارتها في جوار $x_0$ فإن المنحني البياني $(C_f)$ للدالة $f$ له نقطة انعطاف $A(x_0, f(x_0))$ والمماس لـ $(C_f)$ عند $A$ يخترق $(C_f)$.

**مثال -**

$f$ دالة معرفة بالعبارة $f(x)=3x^3+1$.

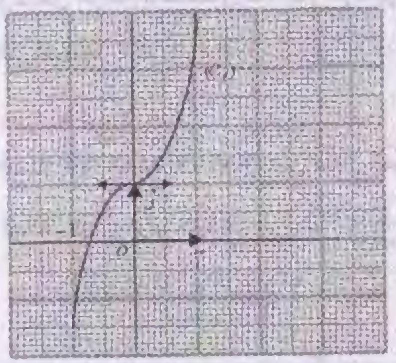
$f$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f'(x)=9x^2$ و $f''(x)=18x$.

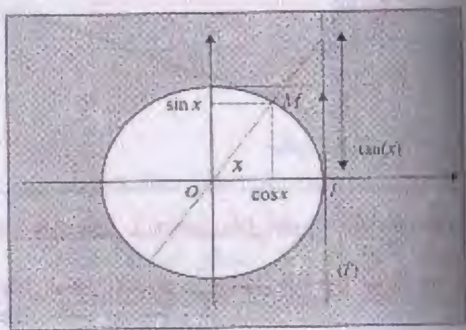
$f''(x)=0$ يكافئ $x=0$

$f''(x)$ ينعدم عند $x_0=0$ مغيرا إشارته في جوار 0 و منه النقطة $A(0,1)$ نقطة انعطاف للمنحني $(C_f)$.




## 6 - دالة الظل tan

دالة الظل التي نرمز لها بـ tan معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k$ عدد صحيح واليك بعض قيم tan من أجل قيم شهيرة لـ $x$.




| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Tan $x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\boxtimes$ |

خواص:

1) من أجل كل $x$ يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ لدينا: $\tan(x+\pi)=\tan(x)$ نقول عندئذ أن الدالة tan دورية و دورها $\pi$.

2) من أجل كل $x$ يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ لدينا $\tan(-x)=-\tan x$ نقول عندئذ أن الدالة tan فردية

- التمثيل البياني للدالة tan

النقطتان ذاتا الإحداثيات $(x, \tan x)$ و $(-x, \tan(-x))$ تنتميان إلى $(\gamma)$ منحنى الدالة tan و متناظرتان بالنسبة إلى المبدأ $O$

إذن $(\gamma)$ يقبل $O$ كمركز تناظر له و لإنشاء المنحنى $(\gamma)$ نرسمه اولا في مجال $[0, \frac{\pi}{2}[$

و نكمل الرسم باستعمال التناظر المركزي الذي مركزه النقطة $O$ و بالإنسحابات المتوالية التي اشعتها $\pi\vec{i}$ و $-\pi\vec{i}$

- دراسة الدالة tan

الدالة tan قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و لدينا $(\tan x)' = 1 - \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

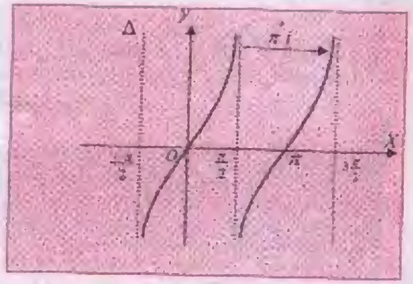
الدالة tan متزايدة تماما لأن $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{<}} \tan x = +\infty$ لأن $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ و $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{<}} \cos x = \overset{+}{0}$

المستقيمات ذات المعادلة $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ مقاربة عمودية لـ $(\gamma)$.

و إليك جدول تغيرات tan على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ و منحناها البياني؛

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $+\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tan' x$ | | + | | + | |
| $\tan x$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |




خاصية :

1) من اجل كل عدد حقيقي $a$ المعادلة $\tan x = a$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

2) إذا كان $\alpha$ حلا للمعادلة $\tan x = a$ فإن كل الحلول الأخرى من الشكل $\alpha + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ .

تمرين تدريبي

أ) ادرس تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ بالعبارة $f(x) = \tan x - 2x$

ب) برهن ان لـ $(C_f)$ له مستقيما مقاربا عموديا ثم ارسم $(C_f)$





الحل ✓

أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $[0, \frac{\pi}{2}[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $I$ هما : $x \mapsto \tan x$ ، $x \mapsto -2x$

و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x) = -1 + \tan^2 x$

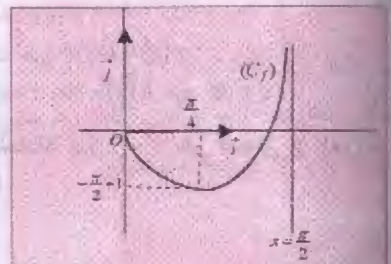
$f'(x)$ تكتب على شكل $f'(x) = (\tan x - 1)(\tan x + 1)$ .

من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $\tan x + 1 > 0$ .

إذا كان $\frac{\pi}{2} > x > \frac{\pi}{4}$ فإن $\tan x - 1 > 0$ و إذا كان $0 < x < \frac{\pi}{4}$ فإن $\tan x - 1 < 0$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ ، $f(0) = 0$ ، $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1$

ب) بما ان $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{<}} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي لـ $(C_f)$




| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $\frac{-\pi}{2}+1$ | ↗ | $+\infty$ |

## 6 - المعادلات التفاضلية

### 6 - 1 تعريف

تسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة و مشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال $I$ يعني إيجاد كل الدوال $f$ القابلة للاشتقاق $n$ مرة على $I$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و التي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق إلى المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$ مع $f$ دالة مألوفة .

### 6 - 2 المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

نضع $y' = f(x)$ ....(1)

إذا كانت $g$ حلا للمعادلة (1) فإن $g'(x) = f(x)$

إذا كان $h$ حلا اخر للمعادلة (1) فإن $h'(x) = f(x)$

و منه نستنتج $g'(x)=h'(x)$ أي $h(x)=g(x)+c$ مع $c\in\mathbb{R}$ .

- في حالة $f(x)=x^2$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y'=x^2$

الدالة $g$ التي مشتقتها يساوي $x^2$ هي $\frac{1}{3}x^3$

و منه المعادلة $y'=x^2$ . حلولها من الشكل $h(x)=\frac{1}{3}x^3+c$ .

- في حالة $f(x)=\sqrt{x}$ المعادلة (1) تصبح $y'=\sqrt{x}$ .

الدالة $g$ المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي مشتقتها يساوي $\sqrt{x}$ هي $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

و بالتالي حلول المعادلة $y'=\sqrt{x}$ هي $h(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$ مع $c\in\mathbb{R}$ .

- في حالة $f(x)=\sin x$ المعادلة (1) تصبح $y'=\sin x$ .

الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي مشتقتها تساوي $\sin x$ هي $g(x)=-\cos x$

و منه حلول المعادلة $y'=\sin x$ هي $h(x)=-\cos x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$ .

- في حالة $f(x)=\cos x$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y'=\cos x$ .

الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي مشتقتها تساوي $\cos x$ هي $g(x)=\sin x$

و منه حلول المعادلة $y'=\cos x$ هي الدوال $h$ حيث $h(x)=\sin x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$ .

- في حالة $f(x)$ كثير حدود من الدرجة $n$ .حلول المعادلة $y'=f(x)$ هي الدوال $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $g(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n+1)$ .

إذا كان $f(x)=a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0$ فإن :

$$g(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+c$$

لأن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f(x)$

و منه الدوال $g$ هي حلول المعادلة $y'=f(x)$ .



مثال.

1) $y'=x^2+x+1$ .... (1)

حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+c$ و $c\in\mathbb{R}$ .

## 6 - 3 المعادلة التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$ .

لحل المعادلة $y''=f(x)$ نتبع ما يلي :

نبحث عن حلول المعادلة $K'=f(x)$ ثم نبحث عن حلول المعادلة $y'=K(x)$ لأن

$y''=(y')'=(K(x))'=f(x)$ .





- حالة $f(x)=\cos x$

حلول المعادلة $K'=f(x)$ هي الدوال $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\sin x+c$

حلول المعادلة $y'=\sin x+c$ هي الدوال $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=-\cos x+cx+d$

حيث $c$ و $d$ عددان حقيقيان كيفيان.

لأن الدوال $h$ هي حلول المعادلة $y''=\cos x$ .

- حالة $f(x)=\sin x$

بنفس الكيفية السابقة نجد حلول هذه المعادلة التي هي الدوال من الشكل :

$h(x)=-\sin x+cx+d$ .

- حالة $f(x)=\sqrt{x}$

حلول المعادلة $K'=\sqrt{x}$ هي الدوال $g$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ .

حلول المعادلة $y'=K$ هي الدوال $h$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{4}{15}x^2\sqrt{x}+cx+d$

لأن الدوال $h$ هي حلول المعادلة التفاضلية $y''=\sqrt{x}$ .

- حالة $f(x)=x^2$

حلول المعادلة $y''=x^2$ هي الدوال $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\frac{1}{12}x^4+cx+d$

حيث $c$ و $d$ عددان حقيقيان.

### تمرين تدريبي

عين الحل الخاص للمعادلة $y''=x^2$ الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(1)=2$

✓ الحل

حلول المعادلة التفاضلية $y''=x^2$ هي الدوال $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$h(x)=\frac{1}{12}x^4+cx+d$ .

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $h'(x)=\frac{1}{3}x^3+c$

$y(0)=1$ يكافئ $d=1$

$y'(1)=2$ يكافئ $\frac{1}{3}+c=2$ يكافئ $c=\frac{5}{3}$ .

لأن الحل الخاص المطلوب هو $h(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{5}{3}x+1$ .

## 7 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = y$

**مثال -**

نعتبر المعادلة $y' = y$ و نضيف الشرط الابتدائي $y(0) = 1$ .
حل هذه المعادلة هو إذن دالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f(0) = 1$
و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = f(x)$ .
نستعمل طريقة أولر من اجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[0,1]$ بخطوة $h = \frac{1}{n}$
حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم.
نعرف المتتالية $(x_n)$ بـ $x_p = x_{p-1} + h$ و $x_0 = 0$ و $x_n = 1$ .
و نحسب القيم المقربة $y_1$ ، $y_2$ ، ....... $y_n$ للأعداد $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ...... $f(x_n)$
بواسطة التقريب التالفي للدالة $f$ .
بما أن $f(0) = 1$ فإننا نضع $y_0 = 1$ .
1) احسب $y_1$
2) أ- اوجد علاقة تربط بين $y_{k+1}$ و $y_k$ ثم استنتج عبارة $y_k$ بدلالة $k$ .
ب- نفرض أن $n = 10$ احسب قيم $y_k$ حيث $n \geq k \geq 1$ .
جـ- أنشئ المنحنى التقريبي لحل المعادلة $y' = y$ على المجال $[0,1]$ .

**✓ الحل**

1) لدينا $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$
و بما أن $f'(x) = f(x)$ من اجل كل $x$ من $[0,1]$ فإن :
$f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1 + h)$ إذن $y_1 = f(x_0)(1 + h) = 1 + h = 1 + \frac{1}{n}$ .

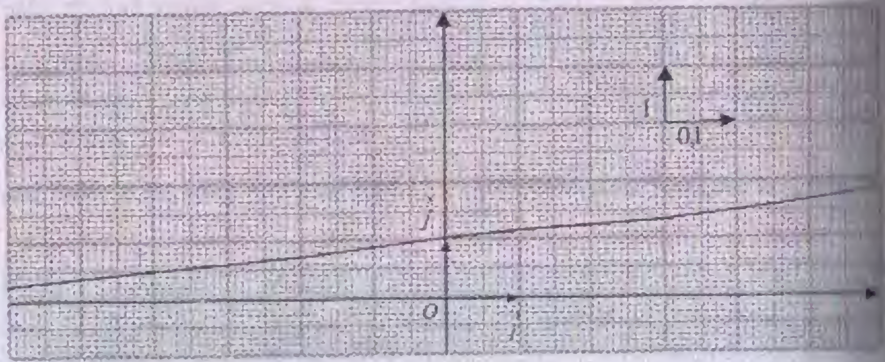
2) أ- $f(x_k + h) \approx f(x_k) + h f'(x_k)$
و بما أن $f'(x_k) = f(x_k)$ فإن $f(x_k + h) \approx (1 + h) \times f(x_k) \approx (1 + h) y_k$
إذن $y_{k+1} = (1 + h) y_k$ .......... (*)
من المساواة (*) نستنتج أن $(y_k)$ متتالية هندسية أساسها $(1 + h)$
و عليه نكتب $y_k = y_0 (1 + h)^k$ أي $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$ .
ب- بما أن $n = 10$
فإن $y_k = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^k = (1,1)^k$
جـ- المنحنى التقريبي للدالة $f$ مشكل من القطع $[M_k M_{k+1}]$ حيث :
$M_k(x_k, y_k)$ و $n - 1 \geq k \geq 0$





| $k$ | $y_k$ | $k$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 6 | 1,77 |
| 1 | 1,10 | 7 | 1,94 |
| 2 | 1,21 | 8 | 2,14 |
| 3 | 1,33 | 9 | 2,35 |
| 4 | 1,46 | 10 | 2,59 |
| 5 | 1,61 | | |

نلاحظ انه كلما صغرت الخطوة $h$ كلما كانت القيم $y_1$ ، ...... $y_k$ قريبة من $f(x_1)$ ......... $f(x_k)$ على التوالي.
الدالة التي تحقق $y' = y$ و $y(0) = 1$ تسمى الدالة الأسية و التي ترمز بـ $\exp$ .




## 8 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = \frac{1}{x}$

**مثال -**

نعتبر المعادلة $y' = \frac{1}{x}$ و نضيف الشرط الابتدائي $y(1) = 0$ .
حل هذه المعادلة هو إذن دالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ بحيث $f(1) = 0$
و من اجل كل $x$ من $]0, +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$ .
نستعمل طريقة أولر من اجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[1, 2]$ بخطوة $h = 0,1$
نعرف المتتالية $(x_p)$ بـ $x_p = x_{p-1} + 0,1$ مع $x_0 = 1$ و $10 \geq p \geq 1$
و لتكن $y_0$ ، $y_1$ ، ... ، $y_{10}$ القيم المقربة للأعداد $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ، .... $f(x_{10})$ على التوالي مع $y_0 = 0$
1) احسب $y_1$
2) بين أن $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$ ثم اعط جدولا تبين فيه قيم $y_p$ ، $x_p$ ثم ارسم المنحنى التقريبي لـ $f$

✓ الحل

1) $f(x_0+h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$ لكن $f'(x_0) = f(x_0)$ و منه ينتج ،

$f(x_0+h) \approx f(x_0) + \frac{h}{x_0}$ إذن $y_1 = y_0 + \frac{h}{x_0} = \frac{h}{x_0} = 0{,}1$

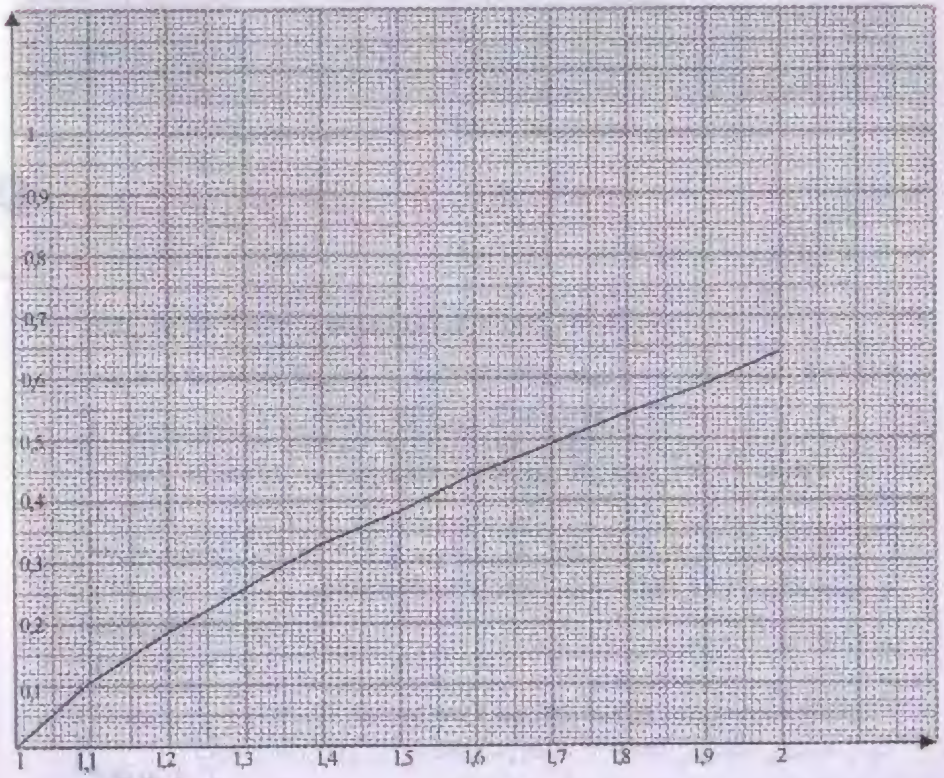
2) $f(x_p+h) \approx f(x_p) + \frac{h}{x_p} \approx y_p + \frac{h}{x_p}$ .

ومنه $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$

المنحنى التقريبي للدالة $f$ مشكل من تسلسل القطع $[M_k , M_{k+1}]$ حيث $9 \geq k \geq 0$ و $M_k(x_k , y_k)$ .

| $p$ | $x_p$ | $y_p$ | $p$ | $x_p$ | $y_p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 6 | 1,6 | 0,44 |
| 1 | 1,1 | 0,10 | 7 | 1,7 | 0,49 |
| 2 | 1,2 | 0,18 | 8 | 1,8 | 0,54 |
| 3 | 1,3 | 0,25 | 9 | 1,9 | 0,59 |
| 4 | 1,4 | 0,32 | 10 | 2 | 0,64 |
| 5 | 1,5 | 0,38 | | | |

تسمى الدالة $f$ التي تحقق $y' = \frac{1}{x}$ و $f(1) = 0$ بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية و نرمز لها بـ "$Ln$".








# تطبيقات نموذجية

## تطبيق 1 دراسة قابلية الاشتقاق

ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند العدد $a$ في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ عند $a = 0$ ، ب) $f(x) = x|x|$ عند $a = 0$

جـ) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ عند $a = 0$ ؛ د) $f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x^2+2}$ عند $a = 0$

هـ) $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ عند $a = 0$

✓ الحل

$f$ تقبل الاشتقاق عند عدد $a$ يعني أن النسبة $\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ لها نهاية حقيقية عند $a$

أ) من أجل كل $x$ من $D_f$ و $x \neq 0$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{x} = 0$ .

و منه الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يمين الصفر

ب) بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس الاشتقاق من اليمين و من اليسار عند الصفر

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim -x = 0 = \ell_1$

إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق من اليسار عند 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-0}{x} = \lim x = 0 = \ell_2$

إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

بما أن $\ell_1 = \ell_2$ فإن $f$ قابلة للاشتقاق عند $a = 0$ .

جـ) من أجل كل $x$ من $D_f = [0,1[$ يمكن كتابة $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ .

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = 0$

إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

د) مجموعة تعريف الدالة $f$ هي $D_f=\mathbb{R}$ .

بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق $f$ من اليمين و من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x^2+x}{(x^2+2)x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = \ell_1$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x^2-x}{(x^2+2)x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x-1}{x^2+2} = \frac{-1}{2} = \ell_2$$

بما أن $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن $f$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

هـ) $$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to0} x \sin\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\sin X}{X} = 0$$

مع $X=\frac{1}{x}$ إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر



## تطبيق 2 تعيين الدالة المشتقة

عين الدالة المشتقة للدالة $f$ على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=x^3+3x^2-6x+4$ ، $I=\mathbb{R}$

ب) $f(x)=\frac{x^3-3x^2+x-1}{x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

جـ) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$ على $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

د) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ ، $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

### ✓ الحل

أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=3x^2+6x-6$ .

ب) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة ناطقة و من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6x+1)(x^2+1)-2x(x^3-3x^2+x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^4-12x^3+2x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$$





جـ) الدالتان $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sin x-1$ قابلتان للاشتقاق على $I$ و لدينا:

$$f'(x)=\frac{(-\sin x)(\sin x-1)-(\cos x)\cos x}{(\sin x-1)^2}$$

$$=\frac{-1+\sin x}{(\sin x-1)^2}=\frac{1}{\sin x-1}$$

د) الدالة $x\mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos^2 x}$

## تطبيق 3 تعيين معادلة المماس

اكتب معادلة المماس لـ $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ عند النقطة ذات الفاصلة المعطاة في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=x^3+x^2-2x$ ، $a=0$ ، ب) $f(x)=x^2\sqrt{x}$ ، $a=1$

جـ) $f(x)=x\cos x$ ، $a=\frac{\pi}{4}$ ، د) $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$ ، $a=2$

### ✓ الحل

إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $a$ فإن منحناها $(C_f)$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة $a$ معادلته $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=3x^2+2x-2$ و منه $f'(0)=-2$ .
إذن $(C_f)$ يقبل مماس $(d)$ عند $A(0,0)$ معادلته $y=-2x$ .

ب) الدالتان $x\xrightarrow{u}\sqrt{x}$ و $x\xrightarrow{v}x^2$ قابلتان للاشتقاق على $]0,+\infty[$
و بالتالي الدالة $f=u\times v$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $f'(x)=2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}$

إذن $f'(1)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$(C_f)$ يقبل مماس $(d)$ عند النقطة $A(1,1)$ معادلته $y=\frac{5}{2}(x-1)+1$

جـ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto x$ ، $x\mapsto \cos x$ و حسب قاعدة مشتق الجداء نجد $f'(x)=\cos x-x\sin x$

و منه $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ .

منه $(C_f)$ يقبل مماسا عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$ معادلته

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\pi\frac{\sqrt{2}}{8}$$

د) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما:
$x \mapsto x$ و $x \mapsto x^2+2$ و منه $f'(x) = \dfrac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$ و بالتالي $f'(2) = \dfrac{-1}{18}$

ومنه معادلة المماس للمنحني $(C_f)$ عند $A\left(2\ ,\ \dfrac{1}{3}\right)$ هي $y = \dfrac{-1}{18}(x-2) + \dfrac{1}{3}$

## تطبيق 4 المماس المشترك لمنحنيين

1) $f$ و $g$ دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ بـ $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = \dfrac{8}{x} + 1$ بين ان المنحنيين الممثلين لـ $f$ و $g$ يقبلان مماسين متوازين عند النقطة ذات الفاصلة $-1$.

2) $h$ و $K$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = x^3 + 2$ و $K(x) = \cos x + 1$ بين أن المنحنيين للمثلين لـ $h$ و $K$ يقبلان نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

✓ الحل

1) الدالتان $f$ و $g$ قابلتان للاشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$
و من أجل كل $x$ من $]-\infty, 0[$ لدينا $f'(x) = 6x - 2$ و $g'(x) = \dfrac{-8}{x^2}$
المنحنيان $(C_f)$ و $(C_g)$ لهما مماسان متوازيان عند النقطة ذات الفاصلة $-1$ يعني ان: $g'(-1) = f'(-1)$.
بما ان $f'(-1) = -8$ و $g'(-1) = -8$ فإن $(C_f)$ و $(C_g)$ لهما مماسان متوازيان ميلهما $-8$ عند النقطة ذات الفاصلة $-1$.

2) الدالتان $h$ و $K$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $h'(x) = 3x^2$ و $k'(x) = -\sin x$
و منه ينتج $h'(0) = 0$ و $K'(0) = 0$ و $h(0) = 2$ و $K(0) = 2$
إذن $(C_h)$ و $(C_K)$ لهما نفس المماس $(d)$ معادلته $y = 2$ ، $(d)$

## تطبيق 5 تعيين مماس موازي لمستقيم معلوم

$(C_f)$ المنحنى البياني للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2} - 1$

1) اعط معادلة المماس للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.





2) هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -\dfrac{1}{4}x$

3) هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -2x$.

✓ الحل

1) معادلة للماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$
$f'(1) = \dfrac{1}{9}$ و $f(1) = -\dfrac{2}{3}$ ومنه معادلة الماس هي $y = \dfrac{1}{9}x - \dfrac{7}{9}$.

2) ميل المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ هو $f'(x_0)$.
المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -\dfrac{1}{4}x$
يعني $f'(x_0) = -\dfrac{1}{4}$.

$f'(x_0) = -\dfrac{1}{4}$ يكافئ $\dfrac{2-x_0^2}{(2+x_0^2)^2} = \dfrac{-1}{4}$ يكافئ $x_0^4 + 12 = 0$

بما ان $x_0^4 + 12 > 0$ فإن المعادلة $x_0^4 + 12 = 0$ ذات المجهول $x_0$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ و
بالتالي لا يوجد مماس لـ $(C_f)$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -\dfrac{1}{4}x$

3) المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -2x$
هذا معناه أن $f'(x_0) = -2$

$f'(x_0) = -2$ يكافئ $\dfrac{2-x_0^4}{(2+x_0^2)^2} = -2$ يكافئ $-2x_0^4 - 7x_0^2 - 10 = 0$ .... (1)

بوضع $x_0^2 = X_0$ المعادلة (1) تصبح $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$
$\Delta = 49 - 4(-2)(-10) < 0$

بما ان $\Delta < 0$ فإن المعادلة $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ .
و بالتالي لا يوجد مماس لـ $(C_f)$ توازي المستقيم $y = -2x$ .

## تطبيق 6 دراسة قابلية الاشتقاق و حساب العدد المشتق

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2+2}$

1) هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند العدد 0 ؟ فسر هندسيا هذه النتيجة

2) احسب $f'(x)$ من اجل كل $x \neq 0$ .

✓ الحل

1) بما أن الدالة $f$ تغير عبارتها في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق $f$ من يمين و من يسار الصفر.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2-x}{x^2+2}}{x} = \lim_{x \to 0} = \frac{x-1}{x^2+2} = -\frac{1}{2} = \ell_1$$

منه $f$ قابلة للاشتقاق من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{(x^2+2)x} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = \ell_2$$

و منه $f$ قابلة للاشتقاق من اليمين عند الصفر.

بما أن $\ell_2 \neq \ell_1$ فإن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و $(C_f)$ له نصفا مماسين ميلها $\ell_1$ و $\ell_2$.

2) بما أن $\begin{cases} |x| = x \ , \ x \geq 0 \\ |x| = -x \ , \ x \leq 0 \end{cases}$ فإن $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+2} \ , \ x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+2} \ , \ x \leq 0 \end{cases}$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+2}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $\left(\frac{x^2+x}{x^2+2}\right)' = \frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2-x}{x^2+2}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ و لدينا $\left(\frac{x^2-x}{x^2+2}\right)' = \frac{x^2+4x-2}{(x^2+2)^2}$

إذن $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2} \ , \ x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{x^2+4x-2}{(x^2+2)^2} \ , \ x < 0 \end{cases}$

## تطبيق 7 المماس العمودي لمنحني

$f$ دالة معرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني

أ) بين أن $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$

ب) عين $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$ ، هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند الواحد ؟

فسر هندسيا النتيجة المحصل عليها سابقا.





✓ الحل

أ) $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} = \frac{x^2-x}{(x-1)\sqrt{x^2-x}} = \frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

ب) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^2-x} = \overset{+}{0}$ .

نستنتج من نتيجة السؤال ب) أن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يمين الواحد و المنحني $(C_f)$ يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 يوازي محور التراتيب.

## تطبيق 8 التقريب التآلفي

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x) = \sqrt{x^2+1}$ و $f(1) = 2$ باستعمال خطوة قدرها 0,1

أوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,1)$ و $f(1,2)$ .

✓ الحل

لدينا $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$ و عليه

$$f(1,1) \approx f(1) + 0,1 \times f'(1) \approx 2 + 0,1 \times \sqrt{2} \approx 2,141$$

$$f(1,2) \approx f(1,1) + 0,1 \times f'(1,1) \approx 2,141 + 0,1 \times \sqrt{2,21} \approx 2,289$$

## تطبيق 9 إنشاء المنحنى التقريبي باستعمال طريقة أولر

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,1[$

بحيث $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{1-x^2}$

باستعمال طريقة أولر و بخطوة قدرها 0,2 عين القيمة التقريبية لـ $f(1)$ .

ثم انشئ التمثيل البياني المقرب لـ $(C_f)$ على المجال $[0,1]$ .

✓ الحل

| $x$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1,20 | 1,40 | 1,58 | 1,74 | 1,86 |

- $f(0,2)\approx f(0)+0,2\,f'(0)$

$f(0,4)\approx f(0,2)+0,2\,f'(0,2)$

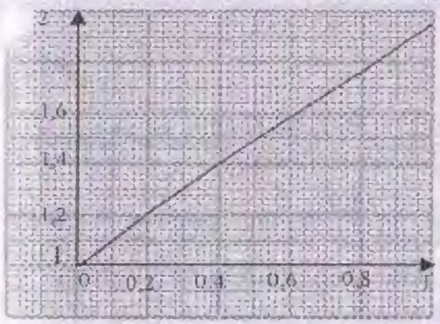
$f(0,6)\approx f(0,4)+0,2\,f'(0,4)$

$f(0,8)\approx f(0,6)+0,2\,f'(0,6)$

$f(1)\approx f(0,8)+0,2\,f'(0,8)$

منه القيمة التقريبية لـ $f(1)$ هي $1,86$

التمثيل البياني المقرب لـ $(C_f)$ مشكل من القطع $[M_K M_{K+1}]$ مع $5\ge K\ge 0$




## تطبيق 10 إيجاد عبارة دالة

$f$ دالة معرفة من اجل كل $x\neq 1$ بـ $f(x)=\dfrac{a\,x^2+b\,x+1}{x-1}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان. أوجد $a$ و $b$ بحيث الدالة $f$ لها قيمة حدية محلية معدومة عند $-1$.

**✓ الحل**

بما ان الدالة $f$ لها قيمة حدية محلية عند $x=-1$ فإن $f'(-1)=0$

و بما ان القيمة الحدية المحلية عند $x=-1$ معدومة فإن $f(-1)=0$.

$f(-1)=0$ تكافئ $\dfrac{a-b+1}{-2}=0$ يكافئ $a-b+1=0$ .... (1)

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ ولدينا $f'(x)=\dfrac{a\,x^2-2\,a\,x-b-1}{(x-1)^2}$

إذن $f'(-1)=\dfrac{3\,a-b-1}{4}$

$f'(-1)=0$ يكافئ $3\,a-b-1=0$ ..... (2)

من (1) نجد $a=-1+b$ نعوضه في (2) نجد $b=2$

إذن $a=-1+2=1$ و بالتالي $f(x)=\dfrac{x^2+2\,x+1}{x-1}$



## تطبيق 11 السرعة و التسارع اللحظيين

جسم معلق على حافة نابض يهتز أفقيا. معادلة حركته هي $X(t)=2\sin t$ مع $X$ بالسنتيمتر و $t$ بالثانية.

أ) ما هي السرعة $V(t)$ عند اللحظة $t$





ب) ما هو التسارع $a(t)$ عند اللحظة $t$ ؟

جـ) ما هي العلاقة التي تربط بين $X(t)$ و $a(t)$ ؟ ثم انشئ في نفس المعلم التمثيلات البيانية للحركة و التسارع و السرعة على المجال $[0,\pi]$.

**✓ الحل**

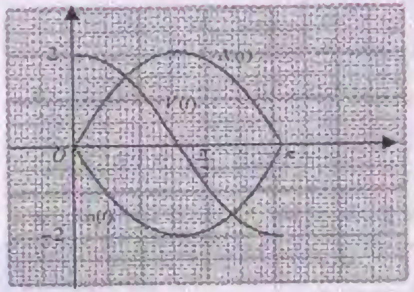
أ) $V(t)=(X(t))'$

$=(2\sin t)'=2\cos t$

ب) $a(t)=(V(t))'$

$a(t)=(2\cos t)'=-2\sin t$

جـ) $a(t)=(-2\sin t)=-X(t)$




## تطبيق 12 نظرية القيم المتوسطة و حل المعادلات

$f$ دالة معرفة من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-x^2-x+\dfrac{5}{6}$.

1) شكل جدول تغيرات $f$ على $\mathbb{R}$.

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

3) نسمي $\alpha$ الحل الذي ينتمي إلى $\left]-\dfrac{1}{3},1\right[$ أعط حصرا لـ $\alpha$ بتقريب $10^{-2}$

**✓ الحل**

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3\,x^2-2\,x-1$

$f'(x)$ تكتب على الشكل $f'(x)=(x-1)(3\,x+1)$

إذا كان $x\in\left]-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty[$ فإن $f'(x)\ge 0$ و منه $f$ متزايدة تماما على كل من $\left]-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$ و $[1,+\infty[$

إذا كان $x\in\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$ فإن $f'(x)\le 0$ و منه $f$ متناقصة تماما على $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{55}{54}$ | ↘ | $-\frac{1}{6}$ | ↗ | $+\infty$ |

2) - بما أن $f' \rangle 0$ على المجال $\left]-\infty , -\frac{1}{3}\right[$ و $0\in\left]-\infty , \frac{55}{54}\right]$

فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في المجال $\left]-\infty , \frac{-1}{3}\right]$

- بما أن $f' \rangle 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{3} , 1\right[$ و $0\in\left]-\frac{1}{6} , \frac{55}{54}\right[$

فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في المجال $\left[-\frac{1}{3} , 1\right]$

- بما أن $f' \rangle 0$ على المجال $]1,+\infty[$ و $0\in\left]-\frac{1}{6} , +\infty\right[$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,+\infty[$

إذن $f(x)=0$ لها ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$ .

3) تعيين حصر لـ $\alpha$ باستعمال طريقة الديكوتومي

نضع : $a=-\frac{1}{3}$ ، $b=1$

$x_0=\frac{a+b}{2}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$ ، $f(x_0)=\frac{23}{54}\rangle 0$

$x_1=\frac{x_0+b}{2}=\frac{2}{3}$ ، $f(x_1)=\frac{1}{54}\rangle 0$

$x_2=\frac{x_1+b}{2}=\frac{5}{6}$ ، $f(x_2)=\frac{-25}{216}\langle 0$

إذن الحل $\alpha$ ينتمي إلى $\left]\frac{2}{3} , \frac{5}{6}\right[$ و منه الحصر $0,66 \langle \alpha \langle 0,83$ .



## تطبيق 13 تعيين عدد حلول معادلة باستعمال دراسة دالة

حدد عدد الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلتين في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) $\sin x - x = 2$ ، ب) $x(2x+1)^2 = 5$ .

✓ الحل

1) نضع $f(x)=\sin x - x$ .

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\cos x-1$ .

ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)\le 0$

ومنه $f'(x)$ سالب و ينعدم عند القيم من الشكل $x=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ .





ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $1 \ge \sin x \ge -1$

وبإضافة $-x$ إلى حدود هذه الأخيرة نجد $1-x\ge \sin x - x \ge -1-x$

إذن حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ومنه $f(x)$ تنتمي إلى $]-\infty,+\infty[$ .

- بما أن $f'(x)\le 0$ على $\mathbb{R}$ و 2 ينتمي إلى $\mathbb{R}$

فإن المعادلة $f(x)=2$ أي $\sin x - x = 2$ لها حل وحيد $\alpha$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ .

ب) نضع $f(x)=x(2x+1)^2$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = (2x+1)(6x+1)$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، $f\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{-2}{27}$

- الدالة $f$ متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ و $\left[-\frac{1}{6},+\infty\right[$ و متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{2} , -\frac{1}{6}\right]$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{-1}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $\frac{-2}{27}$ | ↗ | $+\infty$ |

- بما أن $f' \rangle 0$ على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ و $5\notin]-\infty,0[$

فإن المعادلة $f(x)=5$ أي $x(2x+1)^2=5$ ليس لها حلول في المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ .

- بما أن $f' \rangle 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{2} , \frac{-1}{6}\right[$ و $5\notin\left]-\frac{2}{27} , 0\right[$

فإن المعادلة $x(2x+1)^2 = 5$ ليس لها حلول في المجال $\left[-\frac{1}{2} , \frac{-1}{6}\right]$ .

- بما أن $f' \rangle 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{6} , +\infty\right[$ و $5\in\left]\frac{-2}{27} , +\infty\right[$

فإن المعادلة $f(x)=5$ أي $x(2x+1)^2=5$ لها حل وحيد $\alpha$ ينتمي إلى المجال $\left]-\frac{1}{6} , +\infty\right[$

إذن للمعادلة $f(x)=5$ حل وحيد $\alpha$ على $\mathbb{R}$ .

## تطبيق 14 تعيين القيمة المقربة و القيمة المضبوطة لحل معادلة

$f$ دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+\sqrt{x-1}-4$

1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة $f$

2) بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ثم اعط حصرا له بتقريب $10^{-2}$ و أوجد بطريقة جبرية القيمة المضبوطة لـ $\alpha$.

✓ الحل

1) الدالة $f$ معرفة على $[1,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$

من اجل كل $x$ من $]1,+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $[1,+\infty[$.

$f(1)=-3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) - بما ان $f'>0$ و $0\in[-3,+\infty[$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha$ ينتمي الى $[-3,+\infty[$

- نلاحظ ان $f(2)=-1$ و $f(3)=\sqrt{2}-1$ ومنه $\alpha$ ينتمي الى $]2,3[$.

نستعمل طريقة المسح لتعيين قيمة تقريبية لـ $\alpha$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2,0 | -1 |
| 2,1 | -0,8511 |
| 2,2 | -0,7045 |
| 2,3 | -0,5598 |
| 2,4 | -0,4167 |
| 2,5 | -0,27 |
| 2,6 | -0,1350 |
| 2,7 | +0,0038 |

$p=0{,}1$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2,60 | -0,1350 |
| 2,61 | -0,1211 |
| 2,62 | -0,1072 |
| 2,63 | -0,0932 |
| 2,64 | -0,0793 |
| 2,65 | -0,065 |
| 2,66 | -0,051 |
| 2,67 | -0,037 |
| 2,68 | -0,0238 |
| 2,69 | -0,01 |
| 2,70 | +0,0038 |

$p=0{,}01$

إذن $2{,}68<\alpha<2{,}70$ و منه $2{,}70$ هي القيمة المقربة بالزيادة لـ $\alpha$ إلى $10^{-2}$.

- $f(x)=0$ يكافئ $x-4+\sqrt{x-1}=0$

يكافئ $(4-x)^2=x-1$ و $1\geq x\geq 4$

يكافئ $x^2-9x+17=0$

$$\Delta = 81-4(17) = 81-68 = 13$$

$$x_1=\frac{9+\sqrt{13}}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{9-\sqrt{13}}{2}$$

$x_1$ مرفوض لانه لا ينتمي إلى $[1,4]$ إذن القيمة المضبوطة لـ $\alpha$ هي $\alpha=\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}$.





## تطبيق 15 حساب مشتق الدوال المركبة

1) عين الدالة المشتقة للدالة $f$ المعرفة بالعبارة $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$

2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية

أ) $g(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}-1}$ ، ب) $h(x)=\dfrac{2x^4+1}{x^2-1}$.

جـ) $K(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x-1}}$ ، د) $L(x)=\dfrac{2(\cos x)^4+1}{\cos x-1}$

✓ الحل

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ لأنها ناطقة و من اجل كل $x\in D_f$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$$

2) أ) يمكننا وضع $g(x)$ على الشكل $g(x)=f(\sqrt{x})$.

$$g'(x)=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\;\frac{2(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{2x-4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

ب) لدينا $h(x)=f(x^2)$ ومنه $h'(x)=(x^2)'f'(x^2)=2x\times\dfrac{2x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$

جـ) يمكننا وضع $K(x)$ على الشكل $K(x)=\sqrt{f(x)}$

$$K'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\dfrac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x-1}}}=\frac{(2x^2-4x-1)(\sqrt{x-1})}{(2\sqrt{2x^2+1})(x-1)^2}$$

د) لدينا $L(x)=f(\cos x)$ ومنه $L'(x)=(\cos x)'f'(\cos x)=-\sin x\times\dfrac{2(\cos x)^2-4\cos x-1}{(\cos x-1)^2}$

## تطبيق 16 حساب مشتق دالة باستعمال مشتق دالة مركبة

$f$ دالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-2}$

1) عين الدالة المشتقة $f'$ للدالة $f$.

2) لتكن $g$ دالة معرفة على المجال $I=]4,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=f(\sqrt{x})$.

بين ان $g$ قابلة للاشتقاق على $I$ ثم احسب $g'(x)$ من اجل كل $x$ من $I$

✓ الحل

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ لأنها دالة ناطقة و لدينا $f'(x)=\frac{-6}{(x-2)^2}$

2) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $J=]2,+\infty[$

و الدالة $u: x\mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $I=]4,+\infty[$

و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $u(x)\in J$

إذن الدالة $g=f\circ u$ قابلة للاشتقاق على $I$

و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا

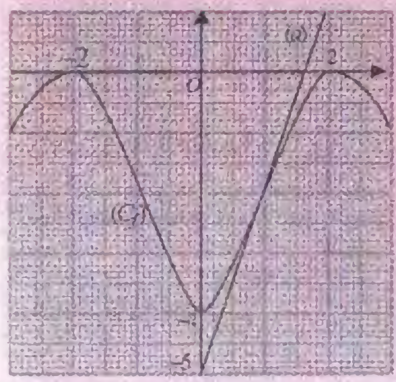
$$g'(x)=u'(x)\times f'(u(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{-6}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{-3}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)^2}$$

## تطبيق 17 حساب العدد المشتق بيانيا

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، تمثيلها البياني و المماسان عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 1 و 0 كما هو مبين في الشكل المجاور. لتكن $g$ و $h$ دالتين معرفتين من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x^2)$ و $g(x)=(f\circ f)(x)$

1) باستعمال هذا البيان عين $f(1)$ ، $f(-2)$ ، $f'(-2)$ ، $f'(1)$ .

2) استنتج $g'(1)$ و $h'(1)$ .




✓ الحل

1) من البيان نجد $f(1)=-2$ ، $f(-2)=0$

- لدينا $f'(-2)=0$ لأن المماس عند النقطة ذات الفاصلة $-2$ موازي لـ $(xx')$ .
- ميل المستقيم $(d)$ هو $f'(1)$ حيث $f'(1)=\frac{-2+5}{1-0}=\frac{3}{1}=3$ .

2) - بما ان $g(x)=f(f(x))$ فإن $g'(x)=f'(x)\times f'(f(x))$

إذن $g'(1)=f'(1)f'(f(1))$ اي $g'(1)=3\times f'(-2)=0$

- بما ان $h(x)=f(x^2)$ فإن $h'(x)=2xf'(x^2)$

إذن $h'(1)=2f'(1)=2\times3=6$ .





## تطبيق 18 حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

أوجد نهاية الدالة $f$ عند العدد $a$ المعطى في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ، $a=0$ ، ب) $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ ، $a=0$

جـ) $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ، $a=2$ ، د) $f(x)=\frac{(x+2)^2-1}{x^2-1}$ ،

✓ الحل

إذا كانت نهاية دالة $f$ عند $a$ من الشكل $\frac{0}{0}$ و كانت $f(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ حيث $g$ دالة قابلة للاشتقاق عند $a$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=g'(a)$ .

أ) بوضع $g(x)=\cos x$ نجد $g(0)=1$

و منه نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a=0$ و منه $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$ .

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=-\sin x$ ومنه نجد $g'(0)=0$

إذن $\lim_{x\to0} f(x)=g'(0)=0$ .

ب) بوضع $g(x)=\tan x$ نجد $g(0)=0$ و منه $f(x)$ تكتب بالشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ .

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند 0 و لدينا $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$ .

من اجل كل $x\in D_g$ لدينا $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ومنه نجد $g'(0)=1$ .

إذن $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=g'(0)=1$

جـ) بوضع $g(x)=\sqrt{x+7}$ . نجد $g(2)=3$

و منه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ .

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]-7,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a=2$

و بالتالي $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2+7}}=\frac{1}{6}$

إذن $\lim_{x\to2} f(x)=g'(2)=\frac{1}{6}$

د) بوضع $g(x)=(x+2)^3$ نجد $g(-1)=1$

ومنه $f(x)$ يكتب على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}$ .

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند $a=-1$ و لدينا $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)=3$

و $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$ و حسب قاعدة جداء النهايات نجد $\lim_{x\to-1}f(x)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{2}$ .

## تطبيق 19 قاعدة لوبيتال

1) بين أنه إذا كانت $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق عند العدد $x_0$

و بحيث $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإن $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

2) استعمل هذه القاعدة لحساب :

أ) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ، ب) $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}$

جـ) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، د) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\sin x-1}{\sin x-\cos x+1}$

✓ الحل

1) $f$ و $g$ قابلتان للاشتقاق عند $x_0$ هذا معناه أن :

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ و $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$ .

بما أن $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإنه يمكن كتابة $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الشكل :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$ مع $x\neq x_0$ .

إذن $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$



2) أ) نضع $f(x)=\sqrt{x+7}-3$ و $g(x)=x-2$

ومنه نجد $f(2)=g(2)=0$ .

الدالتان $f$ و $g$ قابلتان للاشتقاق عند $x_0=2$





و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{1}{6}$ .

ب) نضع $f(x)=x^4-1$ و $g(x)=x^3+3x^2-4$ عندئذ $f(1)=g(1)=0$ .

الدالتان $f$ و $g$ قابلتان للاشتقاق عند $x_0=1$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{4}{9}$ .

جـ) نضع $f(x)=\sin(2x)$ و $g(x)=x-\pi$ منه $f(\pi)=g(\pi)=0$ .

الدالتان $f$ و $g$ قابلتان للاشتقاق عند $x_0=\pi$ .

ومنه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi}=\frac{f'(\pi)}{g'(\pi)}=2$

د) نضع $f(x)=\cos x+\sin x-1$ و $g(x)=\sin x-\cos x+1$ عندئذ $f(0)=g(0)=0$

الدالتان $f$ و $g$ قابلتان للاشتقاق عند $x_0=0$

ومنه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\sin x-1}{\sin x-\cos x+1}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=1$ .

## تطبيق 20 المشتقات المتتابعة

$f$ دالة معرفة من أجل كل $x\neq-1$ بـ $f(x)=\frac{1}{x+1}$ .

1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$ .

2) خمن عبارة $f^{(n)}(x)$ من اجل كل $n\geq1$ ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

✓ الحل

1) $f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ ، $f^{(2)}(x)=f'\left(f^{(1)}(x)\right)=\frac{2}{(x+1)^3}$

$f^{(3)}(x)=f'\left(f^{(2)}(x)\right)=\frac{-6}{(x+1)^4}$ ، $f^{(4)}(x)=f'\left(f^{(3)}(x)\right)=\frac{24}{(x+1)^5}$

2) نلاحظ أن $-1=(-1)^1\times1!$ ، $2=(-1)^2\times2!$ ، $-6=(-1)^3\times3!$ ، $24=(-1)^4\times4!$

إذن عبارة $f^{(n)}(x)$ تكون من الشكل $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times n!}{(x+1)^{n+1}}$ .

نسمي $p_n$ الخاصية المراد إثباتها.

من اجل $n=1$ لدينا $f^{(1)}=\frac{-1}{(x+1)^2}=\frac{(-1)^1\times1!}{(x+1)^2}$

و منه $p_1$ صحيحة.

نفرض أن $p_n$ صحيحة أي $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$.

$$f^{(n+1)}(x) = f'\left(f^{(n)}(x)\right) = \frac{-(n+1)(-1)^n \times n!(x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}}$$

$$= \frac{[(n+1)\times n!]\times(-1)^{n+1}\times(x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!\times(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}}$$

ومنه $p_{n+1}$ صحيحة إذن $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$.

## تطبيق 21 نقطة الإنعطاف

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$.

1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$ و $f^{(n)}(x)$ مع $n\geq 1$.

2) عين إشارة $f^{(2)}(x)$ ماذا تستنتج ؟

### الحل

1) $f^{(1)}(x) = f'(x) = x^2-4x+3$

$f^{(2)}(x) = f'\left(f^{(1)}(x)\right) = 2x-4$.

$f^{(3)}(x) = f'\left(f^{(2)}(x)\right) = 2$

$f^{(4)}(x) = f'\left(f^{(3)}(x)\right) = 0$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن $f^{(n)}(x) = 0$

2) $f^{(2)}(x)$ ينعدم عند $x=2$ مغيرا إشارته في جوار 2

إذن $M_0(2, f(2))$ هي نقطة انعطاف لـ $(C_f)$.

- إذا انعدم $f^{(1)}(x)$ عند $x_0$ و لا يغير إشارته فإن $M_0(x_0, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ $(C_f)$

## تطبيق 22 دراسة اتجاه تغير دالة

ادرس اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية :

أ) $f(x)=x^3+x^2+5x+2$ ، ب) $f(x)=\frac{2x+1}{x-5}$





جـ) $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{1-x}$ ؛ د) $f(x)=\frac{3-x^2}{3+x^2}$

هـ) $f(x)=\frac{2x}{(x+1)^2}$ ، و) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

ن) $f(x)=\cos^2 x-2$ على المجال $[0,\pi]$

### الحل

أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = 3x^2+2x+5$.

$f'(x)=0$ يكافئ $3x^2+2x+5=0$

$\Delta = 2^2-4(3)(5) = -56$

$\Delta<0$ منه المعادلة $3x^2+2x+5=0$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $f'(x)$ من إشارة معامل $(x^2)$

إذن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $f'(x)>0$ . و عليه الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

ب) الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R}-\{5\}$ و لدينا $f'(x) = \frac{-11}{(x+5)^2}$

من أجل كل $x$ من $D_f$ لدينا $f'(x)<0$

ومنه $f$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,5[$ و $]5,+\infty[$.

جـ) الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R}-\{1\}$ و لدينا $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$ .

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=-1)$ أو $(x=3)$.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x^2+2x+3)$.

- إذا كان $x$ ينتمي إلى $[-1,3]$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه $f$ متزايدة تما على $[-1,3]$.
- إذا كان $x\in]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ فإن $f'(x)\leq 0$

و منه الدالة $f$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ ، $[3,+\infty[$.

د) الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \frac{-12x}{(3+x^2)^2}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$ .

- إذا كان $x\leq 0$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $]-\infty,0]$
- إذا كان $x\geq 0$ فإن $f'(x)\leq 0$ و منه $f$ متناقصة تماما على $[0,+\infty[$.

هـ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R}-\{-1\}$ و لدينا $f'(x) = \frac{2(1+x)(1-x)}{(x+1)^4}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$ .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x)(1+x)$ .

- إذا كان $x\in]-1,1]$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $]-1,1]$
- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$ فإن $f'(x)\leq 0$

و منه $f$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $[1,+\infty[$.

و) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D = ]-\infty,-2[ \cup ]2,+\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ .

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$ و $x \in D$ .

بما أن $0 \notin D$ فإن المعادلة $f'(x)=0$ ليس لها حلولا في $D$ .

- إذا كان $x > 2$ فإن $f'(x) > 0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $]2,+\infty[$ .
- إذا كان $x < -2$ فإن $f'(x) < 0$ و منه $f$ متناقصة تماما على $]-\infty,-2[$ .

ن) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$ و لدينا $f'(x) = -2\sin x \cos x$ .

$f'(x)=0$ يكافئ ( $x=0$ أو $x=\pi$ ) أو $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$ .

- إذا كان $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $f'(x) \le 0$ منه $f$ متناقصة تماما على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ .
- إذا كان $x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ فإن $f'(x) \ge 0$ منه $f$ متزايدة تماما على $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

## تطبيق 23 استعمال إشارة دالة لتعيين اتجاه دالة أخرى

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -4x^3+6x^2-6x+2$ .

1) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

2) عين عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$ ثم اعط حصرا لها.

3) استنتج من الأسئلة السابقة إشارة $f$ .

4) $g$ دالة معرفة بـ $g(x) = -x^4+2x^3-3x^2+2x$ .

أ) باستعمال الأسئلة السابقة عين اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ .

ب) استنتج أن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $g(x) \le \frac{7}{16}$

### الحل

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -4x^3 = -\infty$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = -12x^2+12x-6$

$f'(x)=0$ يكافئ $2x^2-2x+1=0$

المعادلة $2x^2-2x+1=0$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ لأن مميزها سالب إذن المشتق لا ينعدم و بالتالي إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة معامل $(x^2)$ و عليه $f'(x) < 0$ .

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | | |
| تغيرات $f$ | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ |





2) بما أن $f' < 0$ على $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha$ على $\mathbb{R}$

حيث $0 < \alpha < 1$ لأن $f(0) > 0$ و $f(1) < 0$ و باستعمال طريقة ديكوتومي نجد $\alpha = \frac{1}{2}$ .

3) إذا كان $x > \alpha$ فإن $f(x) < 0$ و إذا كان $x < \alpha$ فإن $f(x) > 0$

4) أ) الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x) = f(x)$

- $g'(x)=0$ يكافئ $f(x)=0$ يكافئ $x=\alpha$ .
- إذا كان $x > \alpha$ فإن $g'(x) < 0$ و عليه الدالة $g$ متناقصة تماما على $]\alpha,+\infty[$ .
- إذا كان $x < \alpha$ فإن $g'(x) > 0$ و عليه الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty,\alpha[$ .

من جدول تغيرات $g$ نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن $g(x) \le g(\alpha)$ و بما أن $g(\alpha) = \frac{7}{16}$ فإن $g(x) \le \frac{7}{16}$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | + | 0 | − |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ | $g(\alpha)$ | $-\infty$ |

## تطبيق 24 دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بالعبارة $f(x) = \frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$

و $(C_f)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) احسب نهاية $f$ عند $-\infty$ و عند $(+\infty)$ .

ب) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ .

2) ادرس نهاية $f$ عند $-2$ ماذا تستنتج ؟

3) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن $H\left(-2,\frac{-3}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$ ثم ارسم $(C_f)$ و المستقيمات المقاربة.

### الحل

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

ب) $y = x+\frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{8}{2x+4} = 0$$

إذن $y=x+\frac{1}{2}$ معادلة للمستقيم المقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2) بما أن $\lim_{x\to-2}(2x^2+5x+10)=8$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-2}(2x+4)=\overset{+}{0}$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}-2}(2x+4)=\overset{-}{0}$

فإن $\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty$

ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=-2$ مقارب عمودي لـ $(C_f)$.

3) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ و لدينا $f'(x)=\frac{2x(x+4)}{2(x+2)^2}$

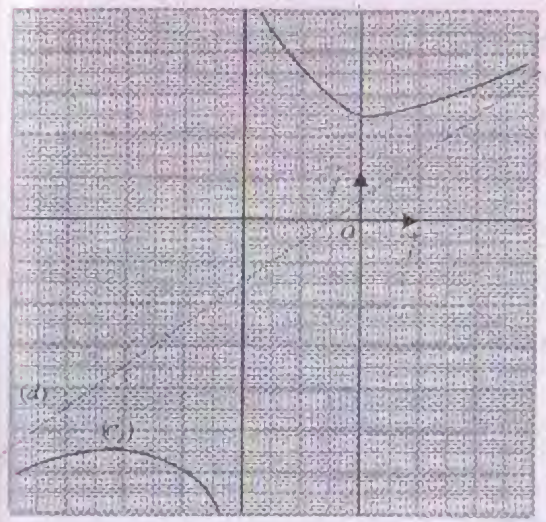
إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$f'(x)=0$ تكافئ $(x=0)$ أو $(x=-4)$.

- إذا كان $x\in[-4,-2[\cup]-2,0]$ فإن $f'(x)\le 0$ و منه $f$ متناقصة تماما على كل من المجالين $[-4,-2[$ و $]-2\ ,\ 0]$.
- إذا كان $x\in]-\infty\ ,\ -4]\cup[0\ ,\ +\infty[$ فإن $f'(x)\ge 0$ و منه $f$ متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-4]$ و $[0,+\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | | $0$ | | ‖ | | $0$ | | |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-4)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(0)$ | ↗ | $+\infty$ |




$f(0)=2,5$ و $f(-4)=-5,5$

4) $H(-2,-1,5)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$

إذا و فقط إذا كان

$f(2(-2)-x)=-f(x)+2(-1,5)$

$f(2(-2)-x)=\frac{2x^2+11x+22}{-2x-4}$

$-3-f(x)=\frac{-2x^2-11x-22}{2x+4}$

ومنه نستنتج أن :

$f(2(-2)-x)=-f(x)+2(-1,5)$

إذن $H$ هي مركز تناظر لـ $(C_f)$





## تطبيق 26 دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

1) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=x^3-3x-3$.

أ) ادرس تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$.

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد على $\mathbb{R}$ نرمز له بـ $\alpha$ ثم

- أعط حصرا له بتقريب $10^{-2}$.

جـ) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$

أ) بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$.

ب) استنتج اتجاه تغير $f$ على $]1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات $f$ على $D_f$.

جـ) بين أن $f(\alpha)=3\alpha+1$

د) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ ثم ادرس الوضع النسبي لهذا المستقيم بالنسبة إلى $(C_f)$.

هـ) أوجد فواصل النقط من $(C_f)$ التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم المقارب المائل. ثم ارسم $(C_f)$ و المستقيمات المقاربة.

### الحل

1) أ) دراسة تغيرات $g$

• $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

. الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=3x^2-3$

$g'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $g'(x)<0$

و منه $g$ متناقصة تماما على $[-1,1]$

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $g'(x)>0$

و منه $g$ متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $+\infty$ |

ب) بما أن $g'(x)\ge 0$ على المجال $[1,+\infty[$ و $0\in[g(1),+\infty[$ فإن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha$ ينتمي إلى المجال

$]1,+\infty[$

. بما أن $g'(x)>0$ على $]-\infty,-1[$ و $0\notin]-\infty, g(-1)[$

فإن المعادلة $g(x)=0$ ليس لها حلولا في المجال $]-\infty, -1[$ .

. بنفس الطريقة نبين أن المعادلة $g(x)=0$ ليس لها حلولا في $[-1,1]$ .

إذن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha$ في $\mathbb{R}$

نلاحظ أن $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ ومنه $\alpha\in]2,3[$

باستعمال طريقة الديكوتومي نجد $2,06<\alpha<2,12$

جـ) إذا كان $x\in]-\infty, \alpha[$ فإن $g(x)<0$

و إذا كان $x\in]\alpha, +\infty[$ فإن $g(x)>0$ .

2) أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\times g(x)$

إذا كان $x>1$ فإن $\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}>0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]1,+\infty[$

ب) - إذا كان $x\in]1,\alpha[$ فإن $f'(x)<0$ وبالتالي $f$ متناقصة تماما على $]1,\alpha[$ .

- إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ وبالتالي $f$ متزايدة تماما على $]\alpha,+\infty[$ .

• اتجاه تغير $f$ على $]-\infty,-1[\cup]-1,1[$ ،

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[$ فإن $\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}<0$ و $g(x)<0$ وبالتالي $f'(x)>0$

إذن $f$ متزايدة تماما على $]-\infty,-1[$ .

- إذا كان $x\in]0,1[$ فإن $f'(x)<0$ منه $f$ متناقصة تماما على $]0,1[$ .

- إذا كان $x\in]-1,0[$ فإن $f'(x)>0$ منه $f$ متزايدة تماما على $]-1,0[$ .

• جدول تغيرات $f$ على $D_f$ ،

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(0)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -1^{<}} f(x)=+\infty$

جـ) $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}+1$ و لدينا $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ يكافئ $3=\alpha^3-3\alpha$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}+1=\frac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}+1=3\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}\right)+1=3\alpha+1$$





د) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

إذن $y=2x+1$ ؛ $(d)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

- الوضع النسبي لـ $(d)$ بالنسبة إلى $(C_f)$ .

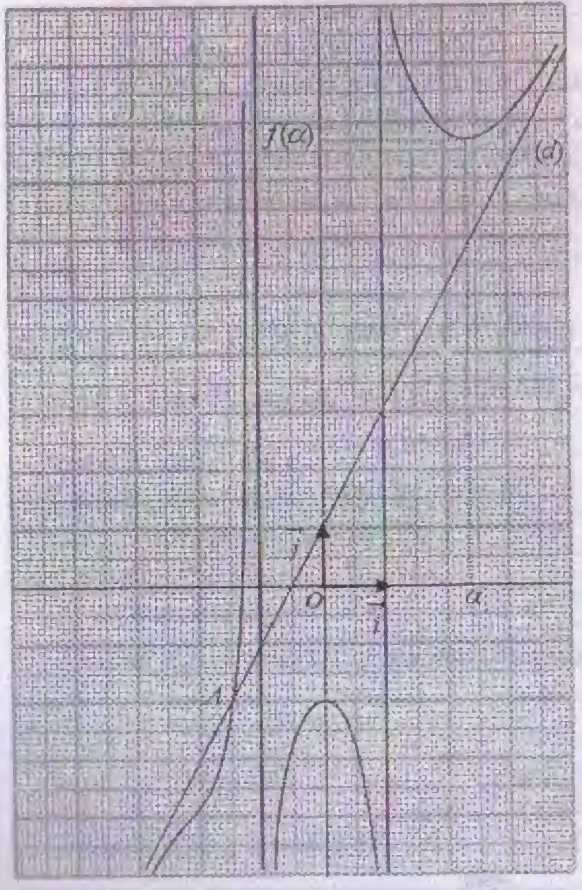
$f(x)-(2x+1)=\dfrac{2x+3}{x^2-1}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-1$ | | $+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-(2x+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |

إذا كان $x$ ينتمي إلى أحد المجالين ، $]-\infty,-\frac{3}{2}[$ و $]-1,1[$ فإن $(C_f)$ يقع تحت $(d)$

- إذا كان $x\in]-\frac{3}{2},-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $(C_f)$ يقع فوق $(d)$

- $(d)$ يقطع $(C_f)$ في النقطة $A\left(-\frac{3}{2},-2\right)$ .




هـ) ميل المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ هو $f'(x_0)$ .

المماس يوازي $(d)$ هذا معناه أن $f'(x_0)=2$

$f'(x_0)=2$ يكافئ $x_0^2+3x_0+1=0$

$x_0^2+3x_0+1=0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$

منه $\Delta=3^2-4(1)(1)=5$

المعادلة (1) ذات المجهول $x_0$ لها حلان هما ،

$x_0''=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ و $x_0'=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$

إذن المنحني $(C_f)$ له مماسان عند النقطتين ذات الفاصلتين ، $x_0''$ و $x_0'$ يوازيان $(d)$ .

## تطبيق 26 عائلة المنحنيات

1) لتكن $f_0$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f_0(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ و $(\gamma_0)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
أ) ادرس تغيرات $f_0$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
ب) عين معامل توجيه المماس لـ $(\gamma_0)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1
2 ) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة $f_n$ ب $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^2}$ .
أ) ادرس تغيرات $f_1$ ثم شكل جدول تغيراتها.
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $f_n'(x)$ له نفس إشارة $x$ ثم استنتج اتجاه تغير $f_n$ .
جـ) برهن أن المنحنيين $(\gamma_1)$ ، $(\gamma_2)$ للدالتين $f_1$ و $f_2$ على الترتيب يقبلان مستقيما مقاربا أفقيا يطلب تعيينه.
د) برهن أن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لبيان الدالة $f_3$ .
3) أ) برهن أن جميع منحنيات الدوال $f_n$ تمر من نقطة ثابتة $A$.
ب) عبر بدلالة $n$ عن معامل توجيه المماس للمنحنيات $(\gamma_n)$ عند النقطة $A$
جـ) ارسم المنحنيات $(\gamma_0)$ ، $(\gamma_1)$ ، $(\gamma_2)$ ، $(\gamma_3)$ .

✓ الحل

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

الدالة $f_0$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_0'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f_0'(x)=0$ يكافئ $x=0$ .
- إذا كان $x > 0$ فإن $f_0'(x) < 0$ و منه $f_0$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$
- إذا كان $x < 0$ فإن $f_0'(x) > 0$ منه $f_0$ متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_0'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| تغيرات $f_0$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

ب) معامل توجيه المماس لـ $(\gamma_0)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو $f_0'(1)=-\dfrac{1}{2}$ .

2) أ) $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ، $D_{f_1}=\mathbb{R}$ .

الدالة $f_1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_1'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f_1'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$ .





- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $f_1'(x) > 0$ منه $f_1$ متزايدة تماما على $[-1,1]$.
- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f_1'(x) < 0$ ومنه $f_1$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]+1,+\infty[$ ، $]-\infty,-1[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ -

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f_1'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| تغيرات $f_1$ | $0$ | $\searrow$ | $-\dfrac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

ب) الدالة $f_n$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}\left[(n-2)x^2+n\right]}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $n\geq 2$ و من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $(n-2)x^2+n\geq 0$
و منه إشارة $f_n'(x)$ هي نفس إشارة $x^{n-1}$ أي نفس إشارة $x$ .
- إذا كان $x > 0$ فإن $f_n'(x) > 0$ و منه $f_n$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ .
- إذا كان $x < 0$ فإن $f_n'(x) < 0$ منه $f_n$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$ .

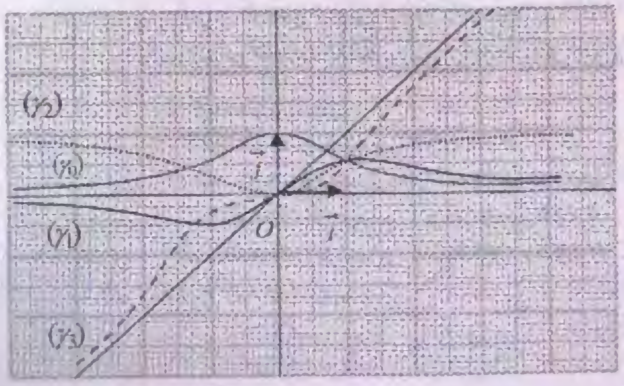
جـ) بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f_1(x)=0$ فإن $(\gamma_1)$ له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $(+\infty)$ ، $-\infty$ .
بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f_2(x)=1$ فإن $(\gamma_2)$ له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

د) $y=x$ مقارب مائل لـ $(\gamma_3)$ إذا و فقط إذا كان $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(f_3(x)-x\right)=0$ .

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f_3(x)-x\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

لأن $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma_3)$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) أ) نفرض أن $(\gamma_{n_1})$ و $(\gamma_{n_2})$ يمران من نقطة ثابتة $A(x_0, y_0)$ حيث $n_1\neq n_2$ .




$A\in(\gamma_{n_1})$ هذا معناه أن :

(1) .... $y_0=\dfrac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2}$

$A\in(\gamma_{n_2})$ هذا معناه أن

(2) ... $y_0=\dfrac{x_0^{n_2}}{1+x_0^2}$

من (1) و (2) نجد :

$\dfrac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2}=\dfrac{x_0^{n_2}}{1+x_0^2}$

منه نستنتج $x_0^{n_1}=x_0^{n_2}$

و بما ان $n_1 \neq n_2$ فإن $x_0 = 1$ و عليه $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

ب) معامل توجيه المماس لـ $(\gamma_n)$ عند $A$ هو $f'_n(1)$.

$$f'_n(1) = \frac{1\left[(n-2)+n\right]}{(1+1)^2} = \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'_2(x)$ | - | 0 | + |
| تغيرات $f_2$ | $-1$ ↘ | $0$ | ↗ $1$ |

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'_3(x)$ | + | 0 | + |
| تغيرات $f_3$ | $-\infty$ ↗ | | $+\infty$ |

## تطبيق 21 المنحنى المقارب - حجم مخروط دوراني

1) $f$ دالة معرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$. نسمي $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. ( طول الوحدة 4cm).

ا) تحقق أنه من أجل كل $x$ من $]1, +\infty[$ يكون $f(x) = x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$.

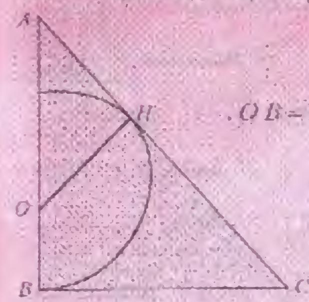
ب) ادرس نهاية $f$ عند 1 و عند $(+\infty)$.

جـ) $(P)$ المنحني الممثل للدالة $g$ المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ $g(x) = x^2+1$.

- ما هي نهاية $[f(x) - g(x)]$ لما $x$ يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

- ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(P)$

د) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم ارسم $(P)$ و $(\gamma)$ في نفس المعلم السابق.



2) في الشكل المجاور:

- المثلث $ABC$ قائم في $B$.

- نصف الدائرة ذات المركز $O$ و نصف القطر $OB = 1$.

- المستقيم $(BC)$ مماس لنصف الدائرة في $B$.

- المستقيم $(AC)$ مماس لنصف الدائرة في $H$.

نضع $AB = h$ و $BC = x$

ا) بين أن $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ ثم استنتج





المساويات التالية $h = x\sqrt{(h-1)^2-1}$ و $x^2 = \frac{h}{h-2}$ و $h = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

ب) بتدوير المثلث $ABC$ حول المستقيم $(AB)$ نحصل على مخروط دوراني رأسه $A$ و إذا علمت أن حجم المخروط الذي ارتفاعه $h$ و مساحة قاعدته $S$ هو $V = \frac{h \times S}{3}$، عبر عن $V(x)$ حجمه بدلالة $x$.

جـ) باستعمال النتائج المحصل عليها في السؤال (1) عين القيمة $x$ التي من أجلها يكون حجم المخروط أصغريا ثم عين من أجل القيمة المحصل عليها الزاوية $B\hat{A}C$ بتقريب 0,1 درجة.

### الحل

1) ا) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) = \frac{x^4-1+1}{x^2-1} = \frac{x^4-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}$

$$= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$$

ب) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4}{x^2-1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 1} (x^2-1) = \overset{+}{0}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

جـ) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

منه نستنتج أن $(P)$ منحنى مقارب لـ $(\gamma)$ بجوار $(+\infty)$.

- إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{x^2-1} > 0$

و منه المنحني $(\gamma)$ يقع فوق $(P)$.

د) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ و لدينا $f'(x) = \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$

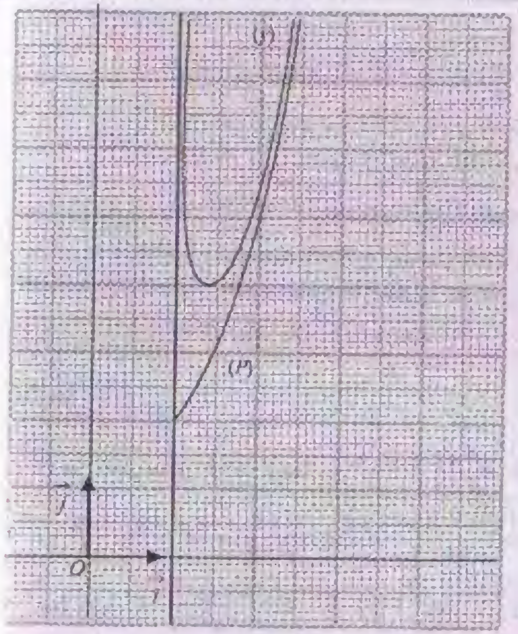
$f'(x) = 0$ يكافئ $x = \sqrt{2}$.

- إذا كان $x > \sqrt{2}$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $]\sqrt{2}, +\infty[$

- إذا كان $1 < x < \sqrt{2}$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه $f$ متناقصة تماما على $]1, \sqrt{2}[$

$g(2) = 5$ ؛ $f(2) \approx 5,33$

| $x$ | $1$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $4$ | ↗ $+\infty$ |




2) أ) في المثلث القائم $ABC$ لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} \quad \ldots\ldots (1)$$

و في المثلث القائم $AOH$ لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{OH}{AH} \quad \ldots\ldots (2)$$

من $(1)$ و $(2)$ نجد $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB} \ldots\ldots (I)$

• استنتاج المساواة

بما أن $H$ نقطة من نصف الدائرة

فإن $OH = 1$

ومنه المساواة $(I)$ تصبح $\frac{1}{AH} = \frac{x}{h}$

إذن $h = AH \times x$.

في المثلث $OAH$ لدينا ،

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

ومنه $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2}$

لكن $OA = AB - OB = h - 1$

إذن $AH = \sqrt{(h-1)^2 - 1}$ بالتالي $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$.

- بتربيع المساواة $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$ نجد $h^2 = \left[(h-1)^2 - 1\right] \times x^2$ و منه ،

$$x^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2 - 1} \quad \text{اي} \quad x^2 = \frac{h^2}{h^2 - 2h} = \frac{h}{h-2}$$

- من المساواة $x^2 = \frac{h}{h-2}$ نجد $h(x^2 - 1) = 2x^2$ بالقسمة على $x^2 - 1$ نجد $h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

ب) $V(x) = \frac{h \times S}{3}$ و $S = \pi \times BC^2 = \pi x^2$

إذن $V(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \times \frac{\pi x^2}{3} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{x^4}{x^2 - 1}\right)$

جـ) نلاحظ ان $V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x)$ اي $V(x) = \lambda f(x)$

بما أن $\lambda \rangle 0$ فإن $V$ و $f$ لهما نفس اتجاه تغير و بما ان $f$ لها قيمة صغرى عند $x = \sqrt{2}$

فإن $V$ لها قيمة صغرى عند $\sqrt{2}$ و في هذه الحالة $V = \frac{2\pi}{3} f(\sqrt{2}) = \frac{8\pi}{3}$

$$\tan(B\hat{A}C) = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و منه $B\hat{A}C \approx 19{,}52°$





## تطبيق 28 المسافة الأعظمية و دوال كثيرة الحدود

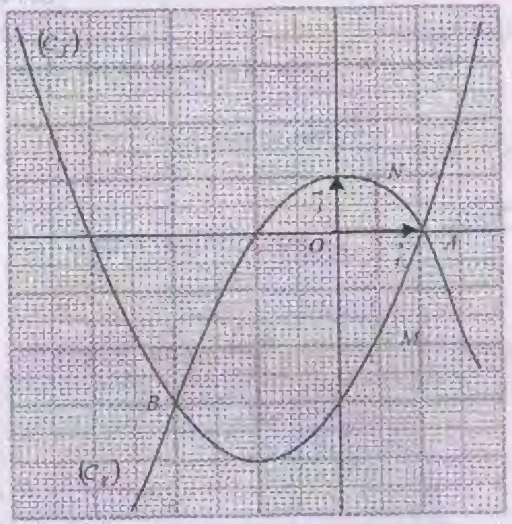
$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 1 - x^2$

$(C_f)$ و $(C_g)$ المنحنيان الممثلان لـ $f$ و $g$ في معلم متعامد و متجانس.

أ) ارسم $(C_f)$ و $(C_g)$ في نفس المعلم.

ب) $M$ و $N$ نقطتان من $(C_f)$ و $(C_g)$ على الترتيب فاصلتيهما $t$ مع $t \in [-2, 1]$. من أجل اي قيمة لـ $t$ تكون $MN$ أعظمية ؟ ثم احسبها.

### الحل




أ) - المنحنيان $(C_f)$ و $(C_g)$ عبارة عن قطعين مكافئين

- $(C_g)$ و $(C_f)$ يتقاطعان في النقطتين $A(1,0)$ و $B(-2,-3)$

ب) $M(t, f(t))$ ، $N(t, g(t))$

$$MN = \sqrt{(t-t)^2 + (f(t) - g(t))^2}$$
$$= |f(t) - g(t)| = g(t) - f(t)$$
$$= -3t^2 - 2t + 4$$

نضع $h(t) = -3t^2 - 2t + 4$

الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $[-2, 1]$ و لدينا $h'(t) = -6t - 2$

المسافة $MN$ تكون أعظمية لما $x = -\frac{1}{3}$ و في هذه الحالة

$MN = h\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3}$.

| $t$ | $-2$ | $-\frac{1}{3}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $h(t)$ | $\nearrow$ | $h\left(-\frac{1}{3}\right)$ | $\searrow$ |

## تطبيق 29 المسافة الأعظمية و الدوال الجذرية

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x) = x\sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}$ حيث $p$ حقيقي موجب تماما.

ا) تحقق ان $f$ معرفة على $\left[\frac{-\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right]$.

ب) ادرس اتجاه تغير $f$ ثم بين ان $f$ لها قيمة اعظمية من اجل $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

2) نهتم الآن بكل المعينات التي محيطها $\rho$ و طول احد قطريها $x$.

ا) عبر عن مساحة هذه المعينات بدلالة $x$ و $\rho$.

ب) باستعمال السؤال الأول، عين من بين المعينات تلك التي لها مساحة أعظمية و ما طبيعة هذا المعين ؟

✓ الحل

1) ا) $f$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{\rho^2}{4}-x^2\geq 0$

$\frac{\rho^2}{4}-x^2\geq 0$ إذا و فقط إذا كان $x\in\left[-\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right]$ و منه $D_f=\left[-\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right]$.

ب) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right[$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{-2\left(x^2-\frac{\rho^2}{8}\right)}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}}$

$f'(x)=0$ يكافئ $\left(x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ أو $\left(x=\frac{-\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $\left(x^2-\frac{\rho^2}{8}\right)$.

$f(-\rho)=0$ و $f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\rho^2}{8}$

| $x$ | $-\frac{\rho}{2}$ | | $\frac{-\rho}{2\sqrt{2}}$ | | $\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$ | | $\frac{\rho}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $f\left(-\frac{\rho}{2}\sqrt{2}\right)$ | ↗ | $f\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{2}\right)$ | ↘ | 0 |

إذن من اجل كل $x$ من $\left[-\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right]$ يكون $f(x)\leq f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

ومنه $f$ لها قيمة اعظمية من أجل $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

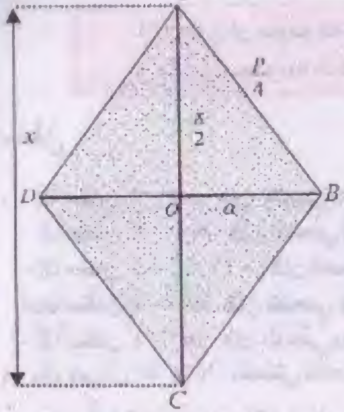
2) ا) نسمي $A$ مساحة المعين المفروض $A(x)=S_T\times 4$

حيث $S_T$ مساحة المثلث $OAB$.

$S_T=\frac{\alpha}{2}\times\frac{x}{2}=\frac{\alpha x}{4}$ ومنه $A=\alpha x$








لدينا $\alpha^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{\rho}{4}\right)^2$

ومنه $\alpha=\sqrt{\frac{\rho^2}{16}-\frac{x^2}{4}}$ اي $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}$

إذن $A(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}=\frac{1}{2}f(x)$

ب) بما أن $f$ و $\frac{1}{2}f$ لهما نفس اتجاه تغير فإن $\frac{1}{2}f$

اي $A$ لها قيمة أعظمية عند $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

إذن يوجد معين واحد من بين المعينات له مساحة أعظمية هي $A\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ و محيطه $\rho$.

في هذه الحالة ( أي لما $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$ ) قيمة $\alpha$ هي $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^2}{8}}=\frac{1}{2}\ \frac{\rho}{2\sqrt{2}}=\frac{\rho}{4\sqrt{2}}$.

بما أن $OA=OB$ فإن $ABCD$ مربع.

## تطبيق 30 الدوال و الحل الهندسي

المنحني ذو المعادلة $y=x-3+\frac{1}{x}$ ممثل في الشكل المجاور.

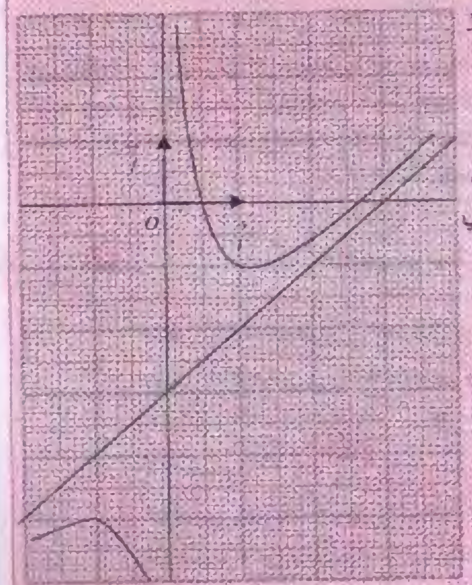
$d$ مستقيم معادلته $y=m$ حيث $m$ عدد حقيقي معطى.

1) باستعمال المنحني عين حسب قيم $m$ عدد نقط تقاطع المنحني مع المستقيم $d$.

2) لتكن $M$ و $N$ نقطتين تقاطع المنحني مع المستقيم $d$ في حالة وجودهما.

تحقق أن فاصلتهما $x_M$ و $x_N$ هما حلول للمعادلة $x^2-(m+3)x+1=0$

3) $I$ منتصف $[MN]$ تحقق ان $\left(\frac{m+3}{2},m\right)$ إحداثيتا $I$



من $\left]\frac{4}{\sqrt{5}} , 2\right[$ يكون $f'(x) < 0$

- إليك جدول تغيرات $f$

| $x$ | $0$ | $\frac{4}{\sqrt{5}}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $+$ | $0$ $-$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $2$ ↗ | $2\sqrt{5}$ ↘ | $4$ ↗ | $+\infty$ |

$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$

4) بما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ و $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = 0$

فإن $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(+\infty)$ .

5) الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2, +\infty[$ فهي تقابل و بالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ من $[4, +\infty[$ في $[2, +\infty[$

$f^{-1} : [4, +\infty[ \to [2, +\infty[$

$y \mapsto x = f^{-1}(y)$

إيجاد عبارة $f^{-1}(x)$

من اجل كل $y \geq 4$ لدينا $y = 2x + \sqrt{x^2 - 4}$ و منه $3x^2 - 4xy + y^2 + 4 = 0$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x_1 = \frac{2y + \sqrt{y^2 - 12}}{3}$ ، $x_2 = \frac{2y - \sqrt{y^2 - 12}}{3}$

$x_2$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[2, +\infty[$ .

إذن $f^{-1}(y) = \frac{2y + \sqrt{y^2 - 12}}{3}$





# تمارين و مسائل

**1**

باستعمال الدوال المشتقة للدوال المرجعية التالية عين معامل توجيه المماس لمنحنيات هذه الدوال عند النقطة ذات الفاصلة $a$ المعطاة.

أ) $f(x) = x^2$ ، $a = -3$ ؛ ب) $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $a = 1$ ، جـ) $K(x) = \sqrt{x}$ ، $a = 4$

**2**

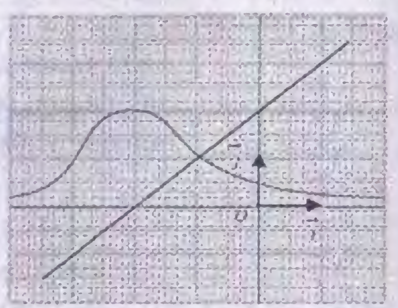
من اجل كل دالة من الدوال التالية ما هي الدالة القابلة للاشتقاق عند العدد المعطى ؟

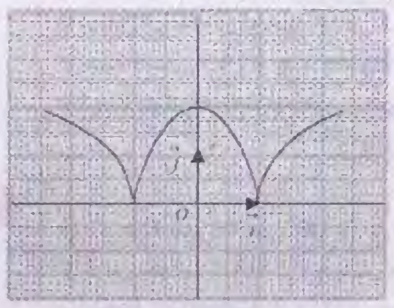
أ) $f(x) = x\sqrt{x}$ ، $a = 0$ ، ب) $f(x) = \sqrt{x-3}$ ، $a = 3$

جـ) $f(x) = |x+3|x$ ، $a = -3$ ، د) $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|-2}$ ، $a = 0$

**3**

إليك التمثيلان البيانيان للدالتين $f$ و $g$ . بقراءة بيانية هل الدالتان قابلتان للاشتقاق عند القيمة $-1$ ؟ و في حالة نعم عين العدد المشتق لكل من الدالتين $f$ و $g$ عند $-1$ .





**4**

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة $f$ :

أ) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ، ب) $f(x) = (2x-1)^3$ ، جـ) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+3}$

د) $f(x) = 3x - \frac{1}{2x+1}$ ، هـ) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+4x+5}$ ، و) $f(x) = x^3\sqrt{x}$

ن) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ ، ي) $f(x)=2x\left(x^2+1\right)^3$

**5**

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية على المجال $I$ المعطى :

أ) $f(x)=x\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، ب) $f(x)=\cos x\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$

جـ) $f(x)=\tan x$ ، $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، د) $f(x)=\frac{2+\cos x}{2+\sin x}$ ، $I=[0,2\pi]$

هـ) $f(x)=x+\sin x$ ، $I=[0,2\pi]$

**6**

$(\gamma)$ المنحني البياني للدالة $f$ المعرفة من أجل كل $x\neq -1$ بـ $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$ .

1) أعط معادلة المماس للمنحني $(\gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$ .

2) هل يوجد مماس لـ $(\gamma)$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=2x$ ؟

3) هل يوجد مماس لـ $(\gamma)$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ ؟

**7**

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$

أ) برهن أن معامل توجيه المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو نفس معامل توجيه المماس لـ $(C_g)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0,25 .

ب) ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص هذين المماسين ؟

**8**

1) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x+5$

أ) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) تحقق أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا محصورا بين $-3$ و $-2$ ثم أعط قيمة مقربة له بتقريب $10^{-1}$

2) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=3x^4+4x^3-12x^2+4$

أ) ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

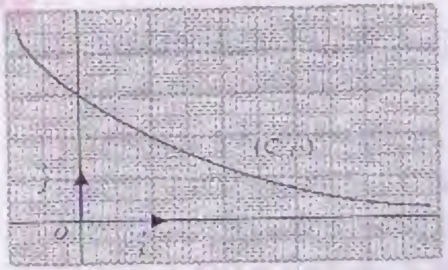
ب) عين عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ ثم من أجل كل حل عين حصرا له بسعة $10^{-1}$ (طول مجال الحصر هو $10^{-1}$)





**9**

$f$ دالة معرفة على $[-1,3]$ بحيث $f(1)=3$ و التمثيل البياني للدالة المشتقة (كما في الشكل) باستعمال خطوة قدرها 0,1 عين القيمة المقربة لـ $f(1,1)$ .




**10**

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على $[-2,2]$ و بحيث $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{9-x^2}$ .

1) باستعمال طريقة أولر بخطوة قدرها 0,5 عين قيمة مقربة لـ $f(2)$

2) ارسم المنحني البياني المقرب للدالة $f$ على المجال $[0,2]$ ثم على المجال $[-2,0]$

**11**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ .

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $\sqrt{1+x^2}\times f'(x)=f(x)$

2) استنتج أنه من أجل كل حقيقي $x$ يكون $\left(1+x^2\right)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$

**12**

1) عين الدالة المشتقة للدالة $f$ المعرفة من أجل كل $x\neq 2$ بـ $f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$

2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$g : x\mapsto \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ ، $h : x\mapsto \frac{x^4+3}{x^2-2}$

$K : x\mapsto \sqrt{\frac{x^2+3}{x-2}}$ ، $L : x\mapsto \frac{\sin^2 x+3}{\sin x-2}$

**13**

في كل حالة من الحالات التالية عين المجال الذي تكون فيه $f$ قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

أ) $f(x)=\sin^3(2x)$ ، ب) $f(x)=\cos^3(5x)$

جـ) $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ ، د) $f(x)=\frac{1}{4\cos^2 x-1}$

**14** -

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$

1) عين الدالة المشتقة $f'$ للدالة $f$ .

2) نرمز بـ $g$ إلى الدالة المعرفة على $I=\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $g(x)=f(\cos(x))$

بين أن $g$ قابلة للاشتقاق على $I$ ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل $x$ من $I$ .

3) نرمز بـ $h$ إلى الدالة المعرفة على المجال $J=]4\,,+\infty[$ بـ $h(x)=f(\sqrt{x})$

بين أن $h$ قابلة للاشتقاق على $J$ ثم احسب $h'(x)$ من أجل كل $x$ من $J$ .

**15** -

- إذا كانت $f$ دالة فردية و قابلة للاشتقاق على $I$ ماذا يمكن القول عن شفعية $f'$ .
- إذا كانت $f$ دالة زوجية و قابلة للاشتقاق على $J$ ماذا يمكن القول عن شفعية $f'$ .

**16** -

باستعمال العدد المشتق أوجد نهاية $f$ عند العدد $a$ في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=\frac{(x+3)^3-1}{x+2}$ ، $a=-1$ ب) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ ، $a=-1$

جـ) $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ، $a=0$ د) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$ ، $a=0$

هـ) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$ ، $a=0$ و) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ ، $a=1$

ن) $f(x)=\frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، $a=\pi$ ي) $f(x)=\frac{\tan(x)}{x}$ ، $a=0$

.) $f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ ، $a=\frac{\pi}{2}$ .) $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$ ، $a=1$

**17** -

1) $a$ ، $b$ عددان حقيقيان، $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس. هل يوجد $a$ و $b$ بحيث المماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته $y=4x+3$ ؟

2) $a$ عدد حقيقي، $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=ax^3+3x^2+3x$

هل يوجد $a$ بحيث الدالة $g$ لها نهاية حدية عظمى من أجل $x=1$ ؟





**18** -

$a$ ، $b$ عددان حقيقيان ، $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^3+bx^2+2$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني. هل يوجد $a$ و $b$ بحيث المماس لـ $(\gamma)$ عند $A(1\,,2)$ يوازي محور الفواصل ؟

**19** -

$f$ دالة معرفة على المجال $I=]1\,,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات $f$ على $I$ .

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha$ من المجال $]1\ ,\ 2[$

3) أعط قيمة مقربة لـ $\alpha$ بتقريب $10^{-2}$ بالزيادة.

**20** -

$f$ دالة معرفة من أجل كل عدد حقيقي $x$ بـ $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

1) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم تمثيلها البياني $(\gamma)$ في معلم متعامد و متجانس.

2) أ) $a$ عدد حقيقي. اكتب معادلة المماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة $A(a\,,f(a))$ .

ب) هل توجد مماسات لـ $(\gamma)$ تمر من المبدأ $O$ ؟

**21** -

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث ( لوحدة هي 2cm ).

1) أ) احسب نهاية $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) بين أن $(d)$ المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$

2) احسب نهاية $f$ عند $-1$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $(\gamma)$ ؟

3) ادرس تغيرات $f$ مشكلا جدول تغيراتها.

4) بين أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر لـ $(\gamma)$ .

5) ارسم المستقيمات المقاربة ثم $(\gamma)$ .

**22** -

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ .

1) احسب نهاية $f$ عند أطراف مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغير $f$ و شكل جدول تغيراتها.

2) برهن ان المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$ ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و $(\gamma)$ .

3) عين بيانيا عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية

$$x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$$

**23**

$f$ دالة معرفة على $]-\infty\,,\,-4]\cup[0,+\infty[$ بـ $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) احسب نهاية $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ .

2) بين أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(+\infty)$ .

3) هل $f$ قابلة للاشتقاق عند $-4$ ؟ عند $0$ ؟

4) احسب $f'(x)$ من اجل كل $x$ من $]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$ و شكل جدول تغيرات الدالة $f$ . ثم ارسم المستقيمات المقاربة و $(\gamma)$ .

**24**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ $f(x)=\frac{x^3-3x-6}{2x+4}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) برهن انه يوجد عددان حقيقيان $a$ و $b$ بحيث من أجل كل $x\neq-2$ يكون:

$$f(x)=a(x-1)^2+\frac{b}{x+2}$$

2) ادرس تغيرات الدالة $f$ .

3) نسمي $(\Gamma)$ المنحني ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ و $x\neq-2$

P نقطة من $(\Gamma)$ فاصلتها $x$ و $M$ نقطة من $(\gamma)$ لها نفس الفاصلة.

اوجد المركبات السلمية للشعاع $\overrightarrow{PM}$ ثم استنتج ان لما $x$ يؤول إلى $(+\infty)$ أو إلى $(-\infty)$ المسافة $PM$ تؤول إلى الصفر، فسر هذه النتيجة هندسيا ثم ارسم $(\Gamma)$ و $(\gamma)$ .

**25**

1) لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=-2x^3-6x^2-1$

ادرس تغيرات $g$ ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]-2,+\infty[$

2) لتكن $f$ دالة معرفة على $]-2,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1-x^3}{x+2}$

أ) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة على $]-2,+\infty[$





ب) عين اتجاه تغير $f$ على $]-2,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ) ارسم $(\gamma)$ التمثيل البياني لـ $f$ في معلم متعامد و متجانس.

**26**

1) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x^3-3x-4$

أ) ادرس تغيرات $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ ثم اعط قيمة مقربة له بتقريب $10^{-2}$ بالزيادة. و استنتج إشارة $g(x)$

2) $f$ دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

أ) بين أن $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$

ب) ادرس تغيرات $f$ ثم شكل جدول تغيراتها ثم اعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ .

جـ) بين أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ .

د) ارسم المستقيمات المقاربة و $(C_f)$ .

**27**

1) $g$ دالة معرفة كما يلي $g(0)=0$ و من اجل كل $x\neq0$ ، $g(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

أ) بين أن $g$ قابلة للاشتقاق عند $0$ .

ب) $(\gamma)$ المنحنى البياني لـ $g$ في معلم متعامد و متجانس .

تحقق أن محور الفواصل مماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة $O$ .

2) أ) برهن أن $g\left(\frac{1}{k\pi}\right)=0$ من اجل كل عدد صحيح $k$ .

ب) $\alpha$ عدد حقيقي موجب تماما، و صغير بالقدر الكافي.

يوجد عدد غير منته من الأعداد $\frac{1}{k\pi}$ مع $k$ عدد طبيعي من المجال $]0,\alpha[$ لماذا ؟

3) هل صحيح أن المماس لـ $(\gamma)$ عند $A$ لا يقطع $(\gamma)$ في نقطة أخرى مختلفة عن $A$ بجوار $A$ ؟

**28**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\,,\,-1\}$ بـ $f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند $-1$.

جـ) ادرس تغيرات $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن $(d_1)$ و $(d_2)$ حيث $y=-x-1$ ، $(d_1)$ و $(d_2): y=x+1$ مقاربان لـ $(\gamma)$ .
ب) ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى كل من $(d_1)$ و $(d_2)$
جـ) أوجد معادلة المماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى هذا المماس على المجال $]-1,1[$ .
د) ارسم المستقيمات المقاربة و المماس و $(\gamma)$ .

**29**

$f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x-1}}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) أ) اعط مجموعة تعريف $f$ .
ب) ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x_0=-1$ من اليسار ماذا تستنتج ؟
جـ) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق $f$ عند $x_1=0$ .
2) بين أن لـ $(\gamma)$ مستقيمين مقاربين مائلين بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ يطلب تعيينهما.
3) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم $(\gamma)$ و المستقيمات المقاربة.

**30**

لتكن $f_\alpha$ دالة معرفة بـ $f_\alpha(x)=\dfrac{x^2+x+3\alpha+1}{x+\alpha}$ مع $\alpha$ عدد حقيقي ، $(\gamma_\alpha)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) ادرس حسب قيم $\alpha$ تغيرات الدالة $f_\alpha$ .
2) بين أن المستقيم $(d_\alpha)$ ذا المعادلة $y=x+1-\alpha$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma_\alpha)$ بالنسبة إلى $(d_\alpha)$
3) اثبت أن جميع المنحنيات $(\gamma_\alpha)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4) نضع $\alpha=2$ ارسم $(\gamma_2)$ .
5) بين أن النقطة $I(-2,-3)$ مركز تناظر لـ $(\gamma_2)$ .
6) ناقش حسب قيم $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة $x^2+(1-m)x+7-2m=0$
7) استنتج من السؤال 6) عدد حلول المعادلة ذات المجهول $\theta$ :
$$\sin^2\theta+(1-m)\sin\theta+7-2m=0$$
8) لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة بـ $g(x)=\dfrac{x^2-|x|+7}{|x|-2}$ .
عين مجموعة تعريف $g$ ثم بين أن $g$ زوجية. و استنتج رسم $(\gamma)$ بيان $g$ .

**31**

$f_1$ و $f_2$ دالتان معرفتان بـ $f_1(x)=2x+\sqrt{4x^2-4}$ و $f_2(x)=2x-\sqrt{4x^2-4}$





و $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ منحناهما البيانيان في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ على الترتيب.

1) ادرس استمرار و قابلية اشتقاق $f_1$ على $D_{f_1}$
2) احسب $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}$ ماذا تستنتج ؟
3) ادرس تغيرات الدالة $f_1$ .
4) بين أن لـ $(\gamma_1)$ مستقيما مقاربا مائلا $(d_1)$ معادلته $y=4x$ بجوار $(-\infty)$ ثم ارسم $(d_1)$ و $(\gamma_1)$ .
5) بين أن $f_1$ تقابل من $]1,+\infty[$ في $]2,+\infty[$ ثم عين عبارة $f_1^{-1}(x)$ و ارسم $(\gamma_1')$ بيانها في نفس المعلم السابق دون دراسة تغيراتها.
6) أ) ليكن $S_O$ التناظر المركزي الذي مركزه النقطة $O$ عين عبارة $S_O$
ب) اثبت أن $S_O(\gamma_1)=(\gamma_2)$ ثم ارسم $(\gamma_2)$ .
7) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي إحداثياتها تحقق المعادلة $y^2-4xy+4=0$
أ) بين أن $(\Gamma)=(\gamma_1)\cup(\gamma_2)$ .
ب) ليكن الشعاع $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ ، اكتب معادلة $(\Gamma)$ في المعلم $\left(o,\vec{i},\vec{v}\right)$ .

لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-\sin x$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ . (وحدة الطول هي 3cm).

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات $f$ على $\mathbb{R}$ .
2) برهن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $2x-1\le f(x)\le 2x+1$ ثم استنتج نهاية $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$
3) نرمز بـ $(d_1)$ و $(d_2)$ إلى المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $y=2x-1$ و $y=2x+1$ عين نقط تقاطع $(\gamma)$ مع $(d_1)$ و $(d_2)$ ثم حدد المماسات لـ $(\gamma)$ عند هذه النقط.
4) ادرس شفعية $f$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى $(\gamma)$ .
5) قارن بين $f(x+2\pi)$ و $f(x)$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى $(\gamma)$ ؟
6) ارسم بدقة المنحني $(\gamma)$ على المجال $[0,\pi]$ ثم ارسم المماسات عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و $\pi$ ثم $(d_1)$ و $(d_2)$ و استنتج رسم $(\gamma)$ على المجال $[-3\pi,3\pi]$ .

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2+1$ إذا كان $x<0$
و $f(x)=x^2+x-\sin x+1$ إذا كان $x\ge 0$

1) بين ان $f$ مستمرة عند $0$ . هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $0$ ؟

2) نفرض في هذا السؤال ان $x \in [0,+\infty[$ .

ا) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة $f'$ على $[0,+\infty[$ .

ب) احسب $f''(0)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $[0,+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على $[0,+\infty[$ .

---

**34**

1) لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $g(0)=0$ و $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

ا) باستعمال طريقة اولر بخطوة $0,5$ اعط قيمة مقربة لـ $g(0,5)$ و $g(1)$

ب) باستعمال طريقة اولر بخطوة $0,2$ ارسم $(\gamma)$ المنحنى البياني المقرب لـ $g$ على $[0,1]$ .

ج) طبق الطريقة السابقة بخطوة $0,1$ ثم بخطوة $0,01$ و باستعمال الآلة الحاسبة البيانية او المجدول ارسم منحنا تقريبيا للدالة $g$ .

- اعط قيمة مقربة لـ $g(1)$ .

2) باستعمال اتجاه تغير الدالتين برهن انه من اجل كل $x$ من $[0,+\infty[$ يكون $0 \le g(x) \le x$

3) لتكن $f$ دالة الظل ( tan )

ا) برهن انه من اجل كل $x$ من $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ يكون $g'(f(x))=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

ب) استنتج مشتق الدالة $gof$ ثم احسب $gof(0)$

ج) استنتج من الأسئلة السابقة أنه من اجل كل $x$ من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ يكون $(gof)(x)-x=0$ و استنتج أيضا القيمة المضبوطة لـ $g(1)$

---

**35**

$f_n$ دالة عددية معرفة على $]-\infty,1]$ بـ $f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}$ مع $n$ عدد طبيعي غير معدوم و نرمز بـ $(\gamma_n)$ إلى التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

1) هل الدالة $f_n$ قابلة للاشتقاق عند $1$ ماذا تستنتج ؟

2) عين حسب قيم $n$ نهاية $f_n$ عند $(-\infty)$

3) ا) ادرس تغيرات $f_n$ ( ميز الحالتين $n$ فردي و $n$ زوجي)

ب) في كل حالة من هاتين الحالتين شكل جدول تغيرات $f_n$ .

4) ارسم $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ ( الوحدة هي 4cm)

5) ليكن $n$ عدد طبيعي غير معدوم، عين حسب قيم $x$ الوضع النسبي لـ $(\gamma_n)$ و $(\gamma_{n+1})$

---





**36**

لتكن الدالة العددية $f_\alpha$ المعرفة بـ $f_\alpha(x)=\frac{\sin^2 x-\alpha^2}{\cos^2 x-\alpha^2}$ ، $\alpha$ وسيط حقيقي موجب و $(\gamma_\alpha)$ التمثيل البياني للدالة $f_\alpha$ .

1) عين حسب قيم $\alpha$ مجموعة تعريف الدالة $f_\alpha$ .

2) إذا كان $\alpha \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ بين أن جميع المنحنيات $(\gamma_\alpha)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

3) ادرس تغيرات الدوال $f_0$ ، $f_1$ ، $f_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ثم ارسم $(\gamma_0)$ ، $(\gamma_1)$ ، $\left(\gamma_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

---

**37**

$f_\alpha$ دالة معرفة بـ $f_\alpha(x)=\alpha x+2\sqrt{\alpha^2x^2-1}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ، $(\gamma_\alpha)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) اوجد مجموعة تعريف الدالة $f_\alpha$ ثم ضعها على شكل مجالات.

2) هل المنحني $(\gamma_\alpha)$ له مستقيمات مقاربة مائلة ؟

3) ا) ادرس قابلية اشتقاق $f_\alpha$ عند $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\alpha}$ ماذا تستنتج ؟

ب) نضع $\alpha=\frac{1}{3}$ ، ارسم $\left(\gamma_{\frac{1}{3}}\right)$

ج) برهن ان $f_{\frac{1}{3}}$ تقبل دالة عكسية $f_{\frac{1}{3}}^{-1}$ يطلب رسم تمثيلها البياني في نفس المعلم.

4) لتكن $g$ دالة معرفة بـ $g(x)=\frac{-1}{3}x-2\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$

أثبت ان $(C_g)$ و $\left(\gamma_{\frac{1}{3}}\right)$ متناظران بالنسبة إلى $(xx')$ ثم ارسم $(C_g)$ .

---

**38**

$f$ دالة معرفة بـ $f(x)=|x-1|+\frac{2}{x+1}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني.

1) ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق $f$ عند $x=1$

2) بين ان $(d_1)$ : $y=x-1$ ، $(d_2)$ : $y=-x+1$ مستقيمان مقاربان لـ $(\gamma)$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ على الترتيب.

3) ادرس تغيرات $f$ ثم شكل جدول تغيراتها. و ارسم $(\gamma)$ و $(d_1)$ و $(d_2)$

4) لتكن $g$ دالة معرفة بـ $g(x)=|x|-1+\frac{2}{1+|x|}$

عين مجموعة تعريف الدالة $g$ ثم بين ان $g$ زوجية و ارسم $(\gamma')$ بيان $g$ استنتاجا.

---

**39** -

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ( طول الوحدة 2cm).

1) أ) عين مجموعة تعريف $f$ .

ب) برهن أن المنحني $(\gamma)$ يقبل المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ كمحور تناظر له.

جـ) اثبت أن $f$ دورية و دورها $2\pi$ .

د) اشرح لماذا يمكن اقتصار دراسة $f$ على $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2) أ) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ يكون

$$f'(x)=\cos x\left[\frac{3}{(2+\sin x)^2}-1\right]$$

ب) برهن أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ من $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ثم احسب $f(\alpha)$ .

جـ) شكل جدول تغيرات $f$ على المجال $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

د) احسب $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ثم اعط قيمة تقريبية لـ $\alpha$ .

3) أ) ارسم $(\gamma)$ على المجال $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

ب) ارسم $(\gamma_1)$ حيث $(\gamma_1)$ هي مجموعة النقط $M(x,y)$ من $(\gamma)$ و $\frac{\pi}{2}\geq x\geq 0$ في معلم متعامد و متجانس (طول الوحدة 10cm).

4) لتكن $g$ دالة معرفة بـ $g(x)=f(x)-x$

أ) برهن انه يوجد عدد حقيقي وحيد $x_0$ من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $g(x_0)=0$

ب) حدد بيانيا حل $x_0$ انطلاقا من $(\gamma_1)$

جـ) تحقق ان $x_0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ على $I\!R$ .

5) لتكن المتتالية العددية $(U_n)$ المعرفة بـ $U_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1}=f(U_n)$ و لتكن النقطتان $A_n(U_n,U_{n+1})$ ، $B_n(U_{n+1},U_{n+1})$

أ) على أي منحني تحد النقطتين $A_n$ و $B_n$ ؟

ب) أنشئ النقط $A_0$ ؛ $B_0$ ؛ $A_1$ ، $B_1$ ، $A_2$ ، $B_2$ في نفس المعلم و ذلك باستعمال السؤال (أ) و بدون حساب تراتيب هذه النقط ما عدا النقطة $A_0$ .

جـ) مثل الأعداد الحقيقية $U_0$ ، $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ على المحور $(o,\vec{i})$.





د) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

هـ) برهن أن من اجل كل $x$ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ يكون $|f'(x)|\leq\frac{2}{3}$ ثم بين انه من اجل كل $n\in I\!N$ يكون $|U_{n+1}-x_0|\leq\frac{2}{3}|U_n-x_0|$

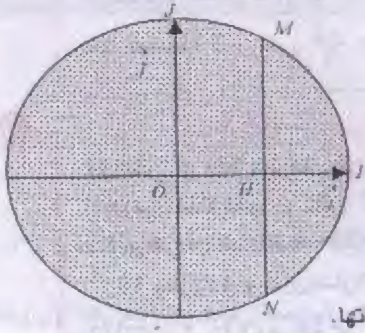
و) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون :

$|U_n-x_0|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-x_0|$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المتتالية $(U_n)$ ؟

**40** -

في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر الدائرة $(C)$ ذات المعادلة $x^2+y^2=1$ و النقطة $I$ ذات الإحداثيي $(1,0)$ ، $M$ و $N$ نقطتان من $(C)$ بحيث $(MN)\perp(OI)$ و $H$ نقطة تقاطع المستقيمان $(OI)$ و $(MN)$ ، نضع $\vec{OH}=x\vec{i}$ .

1) احسب مساحة المثلث $MNI$ بدلالة $x$ .




2) $f$ الدالة المعرفة على $[-1,1]$ بـ $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$

أ) أوجد قيم $f$ عند أطراف مجال التعريف.

ب) ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند $-1$ و $1$ ثم استنتج معادلات المماسات للمنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ عند النقطتين ذواتا الفاصلتين $-1$ و $1$.

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

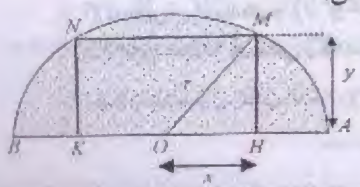
د) ارسم $(C_f)$ في معلم متعامد و متجانس ( طول الوحدة 10cm)

3) من اجل اي قيمة لـ $x$ مساحة المثلث $MNI$ أعظمية ؟ ما هي هذه المساحة ؟

4) من اجل اي قيمة لـ $x$ مختلفة عند الصفر تكون مساحة المثلث $MNI$ تساوي 1 ( يعطى $x$ بتقريب 0,01 بالزيادة ) .

**41** -

لتكن $(C)$ نصف دائرة مركزها $O$ و نصف قطرها $r$ ، $KHMN$ مستطيل مرسوم داخل نصف الدائرة كما هو موضح في الشكل.




1) عين قيمة $x$ بحيث المستطيل له مساحة أعظمية ، ما هي عندئذ قيمة $y$ ؟

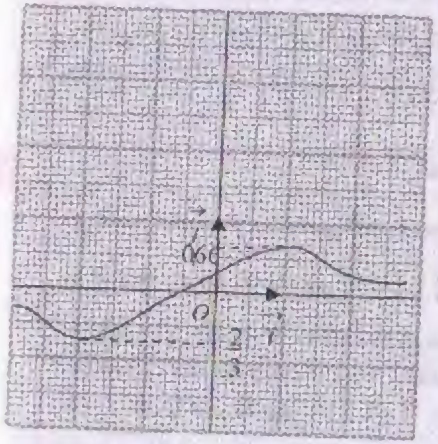
2) نسمي الآن $\theta$ قيس الزاوية $A\hat{O}M$

- عبر بدلالة $\theta$ عن مساحة المستطيل $KHMN$

ـ من اجل أي قيمة لـ $\theta$ تكون مساحة المستطيل أعظمية ؟

**42** -

لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و الدالة $f'$ منحناها البياني كما هو موضح في الشكل المجاور.




من اجل كل معلومة من المعلومات التالية ما هي الصحيحة و الخاطئة منها ؟

1) $f$ تقبل قيمة صغرى من اجل $x=\frac{-1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=0$

3) $f$ متناقصة تماما على $]1\,,+\infty[$

4) إذا كان $f(-2)=1$ فإنه من اجل كل $x\in[-2\,,\,1]$ يكون $f(x)\geq 1$

5) معادلة المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-2$ هي $y=\frac{-2}{3}$.

**43** -

1) لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x^3+x^2-1$

أ) ادرس اتجاه تغير $g$ على $\mathbb{R}$.

ب) برهن ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، ثم اعط حصرا لـ $\alpha$ بتقريب $10^{-1}$ بالزيادة. و عين إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

2) لتكن $f$ دالة معرفة على $]-\infty\,,0[\cup]0\,,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$

أ) برهن ان من أجل كل $x\neq 0$ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير $f$ و احسب نهاية $f$ عند $0$ ، $+\infty$ ، $-\infty$

جـ) برهن ان $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) نسمي $(\gamma)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 3cm) و لتكن $I$ نقطة من $(\gamma)$ فاصلتها $-1$ و $J$ نقطة من $(\gamma)$ فاصلتها 1 .

أ) تحقق أن المستقيم $(IJ)$ مماس لـ $(\gamma)$ عند $J$.

ب) عين معادلة للمماس $(T)$ للمنحني $(\gamma)$ عند $I$ ثم ادرس وضعية $(\gamma)$ بالنسبة لهذا المماس.

جـ) باستعمال كل النتائج السابقة ارسم $(\gamma)$ (تاخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة مقربة لـ $\alpha$ ).





الدرس **4**



# الدَّالَةُ الأُسِّيَة

## 1. دراسة المعادلة التفاضلية $f'=f$ مع $f(0)=1$

مثال .

تقبل انه توجد دالة وحيدة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=f(x)$ و $f(0)=1$.

نريد إنشاء المنحنى البياني التقريبي للدالة $f$ باستعمال مجبول (طريقة اولر) على $[-1\,,1]$.

1) باستعمال التقريب التالفي $f(a+h)\approx f(a)+h\times f'(a)$

أ) عين قيمة تقريبية لـ $f(0,5)$ و $f(1)$ بخطوة $h=0,5$

ب) عين قيمة تقريبية لـ $f(-0,5)$ و $f(-1)$ بخطوة $h=-0,5$

2) على المجال $[0,1]$ نختار خطوة $h=0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n\,,y_n)$ حيث $y_n=f(x_n)$ و $x_0=0$ و $y_0=1$

أ) بين ان المتتالية $(x_n)$ حسابية و $(y_n)$ متتالية هندسية ثم اكتب $x_n$ و $y_n$ بدلالة $n$.

ب) أعط القيمة التقريبية لـ $y_n=f(x_n)$ مع $0\leq n\leq 10$ و $n\in\mathbb{N}$.

جـ) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة $f$ على المجال $[0,1]$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 0,1 )

3) على المجال $[-1,0]$ نختار خطوة $h=-0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n, y_n)$ حيث $y_n = f(x_n)$ و $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$

ا) اكتب $x_n$ و $y_n = f(x_n)$ بدلالة $n$.

ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n = f(x_n)$ حيث $10 \geq n \geq 0$

جـ) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة $f$ على المجال $[-1,0]$ في نفس المعلم السابق.

### ✓ الحل

1) بما أن $f'(a) = f(a)$ فإن $f(a+h) \approx (1+h) \times f(a)$

ا) $f(0,5) = f(0+0,5) = (1+0,5)f(0) = 1,5 \times 1 = 1,5$

$f(1) = f(0,5+0,5) = (1+0,5)f(0,5) = 1,5 \times 1,5 = 2,25$

ب) $f(-0,5) = f(0-0,5) = (1-0,5)f(0) = 0,5$

$f(-1) = f(-0,5-0,5) = (1-0,5)f(-0,5) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$

2) ا) النقطة $M_0$ احداثيتاها $(0,1)$ و النقطة $M_1$ إحداثيتاها $(x_1, y_1)$ حيث $x_1 = x_0 + h$ و $y_1 = (1+h)y_0$.

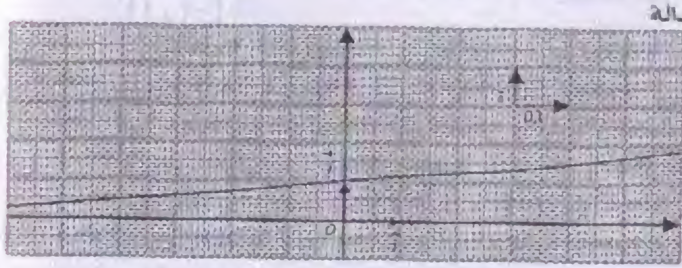
النقطة $M_2$ إحداثيتاها $(x_2, y_2)$ حيث $y_2 = (1+h)y_1$ و $x_2 = x_1 + h$ و هكذا دواليك النقطة $M_n$ إحداثيتاها تحقق $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = (1+h)y_{n-1}$ و منه نستنتج أن $(x_n)$ متتالية حسابية أساسها $h$ و $(y_n)$ متتالية هندسية أساسها $(1+h)$.

بما أن $h = 0,1$ فإن $x_n = x_0 + nh = 0,1n$ و $y_n = y_0 \times (1+h)^n$ اي $y_n = (1,1)^n$

ب)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| $y_n$ | 1 | 1,1 | 1,21 | 1,33 | 1,46 | 1,61 | 1,77 | 1,94 | 2,14 | 2,35 | 2,59 |

جـ) المنحنى التقريبي للدالة $f$ مشكل من قطع $[M_k M_{k+1}]$ حيث $n-1 \geq k \geq 0$ و $M_k(0,1k ; (1,1)^k)$



3) ا) المتتالية $(x_n)$ معرفة كما يلي

$x_n = x_{n-1} + h$

اي $x_n = x_{n-1} - 0,1$ و عليه $(x_n)$ متتالية حسابية اساسها $-1$ إذن $x_n = -0,1n$.

المتتالية $(y_n)$ معرفة كمايلي $y_n = (1-0,1)y_{n-1}$ أي $y_n = 0,9\,y_{n-1}$

وبالتالي $(y_n)$ متتالية هندسية اساسها $0,9$ و عليه $y_n = 1 \times (0,9)^n$.





ب)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | -0,1 | -0,2 | -0,3 | -0,4 | -0,5 | -0,6 | -0,7 | -0,8 | -0,9 | -1 |
| $y_n$ | 1 | 0,9 | 0,81 | 0,72 | 0,65 | 0,59 | 0,53 | 0,47 | 0,43 | 0,38 | 0,34 |

**خاصية**

إذا وجدت دالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = f$ و $f(0)=1$ فإنها لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

**الإثبات**

لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $h'$ معرفة بـ

$h'(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x)$

وبما انه $f'(x) = f(x)$ فإن عبارة $h'(x)$ تصبح $h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$

إذن $h$ دالة ثابتة.

بما انه $f(0)=1$ فإن $h(0) = f(0)f(0) = 1$ و بالتالي من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $h(x) = 1$

بما انه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)f(-x) = 1$ فإن $f(x)$ غير معدومة على $\mathbb{R}$.

**مبرهنة**

توجد دالة وحيدة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $f' = f$ و $f(0)=1$.

**الإثبات**

وجود الدالة $f$ يقبل بدون برهان ولكن يلزمنا إثبات وحدانية $f$.

لتكن $g$ دالة أخرى قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $g' = g$ و $g(0)=1$.

الدالة $\frac{g}{f}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0$

إذن الدالة $\frac{g}{f}$ ثابتة من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و بما أن $\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ فإن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ اي $g(x) = f(x)$ و هذا يدل على أن $f$ وحيدة.

## 2. تعريف الدالة الأسية

نسمي دالة اسية، الدالة الوحيدة $f$ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = f$ و $f(0)=1$ ونرمز لها بـ $\exp$ و نكتب $f(x) = \exp(x)$.

## 3. خواص الدالة الأسية

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها اي $\exp'(x)=\exp(x)$

2) الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\exp(0)=1$

3) مهما يكن العددان الحقيقيان $a$ و $b$ لدينا $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

4) مهما يكن العددان الحقيقيان $a$ و $b$ و العدد الصحيح $n$ لدينا

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad ، \quad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)} \quad ، \quad \exp(2a)=(\exp(a))^2$$

$$\exp(na)=(\exp(a))^n$$

5) مهما يكن العدد الحقيقي $a$ يكون $\exp(a)\rangle 0$

**الإثبات**

نتحصل على الخاصيتين (1) و (2) من التعريف

3) لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=f(a+b-x)f(x)$ حيث $f$ الدالة الأسية.

$g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=-f(a+b-x)f(x)+f(a+b-x)f(x)=0$

إذن $g$ دالة ثابتة.

بما ان $g(0)=f(a+b)f(0)=f(a+b)$ و $g(b)=f(a)f(b)$ فإن

$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ اي $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

4) - $\exp(2a)=\exp(a+a)=\exp(a)\times\exp(a)=(\exp(a))^2$

- لدينا $\exp(-a+a)=\exp(-a)\times\exp(a)$ و لدينا من جهة أخرى $\exp(-a+a)=1$

إذن $1=\exp(-a)\times\exp(a)$ و بالتالي $\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$

- $\exp(a-b)=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a)\times\frac{1}{\exp(b)}=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- نتقبل ان $\exp(na)=(\exp(a))^n$ (نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع من اجل $n$ طبيعي).

و من أجل $n$ عدد صحيح سالب فإن $-n$ عدد طبيعي و لدينا

$$\exp(na)=(\exp-(-na))=\frac{1}{\exp(-na)}=\frac{1}{(\exp a)^{-n}}=(\exp a)^n$$

5) بكتابة $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ فيكون $\exp(a)=\exp\left(\frac{a}{2}\right)\times\exp\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$

و منه نستنتج $\exp(a)\rangle 0$ .

**مبرهنة**

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة $f$ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، غير معدومة، حيث

$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ و $f'(0)=1$





**الإثبات**

الدالة الأسية تحقق الشروط الأربعة التالية:

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ) ، (غير معدومة) ، ( $f'(0)=1$ ) ، ( $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ ).

لتكن $f$ دالة اخرى تحقق هذه الشروط الأربعة السابقة و بحيث من اجل $a$ عدد حقيقي معطى ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ كيفي $f(x+a)=f(x)\times f(a)$ .

الدالة $x\mapsto f(x+a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين ، والدالة $x\mapsto f(x)f(a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ .

إذن $f'(x+a)=f(a)\times f'(x)$

من أجل $x=0$ لدينا $f'(a)=f(a)f'(0)$ و بما ان $f'(0)=1$ فإن $f'(a)=f(a)$ من أجل كل $a$

إذن الدالة $f$ حل للمعادلة $f'=f$ .

بالإضافة إلى ذلك $f(a+0)=f(a)\times f(0)$ اي $f(a)=f(a)\times f(0)$

لكن $f(a)$ غير معدوم إذن $f(0)=1$

و عليه $f$ هي حل للمعادلة $f'=f$ و $f(0)=1$ و هذا يعني أن $f$ هي الدالة الأسية.

**تمرين تدريبي 1**

$f$ ، $g$ ، $h$ دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\exp(x)+2x$ ، $g(x)=\exp(x-1)$ و $h(x)=\exp(-2x)$

أ) عين اتجاه تغير كل دالة .

ب) أوجد علاقة بين $g$ و $g'$ و أيضا بين $h$ و $h'$ .

**✓ الحل**

أ) - الدالة $f$ هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto \exp x$ و $x\mapsto 2x$ و لدينا $f'(x)=\exp x+2$ .

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp x\rangle 0$ ومنه $f'(x)\rangle 0$ اي ان الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- $g(x)=\exp(x)\times\exp(-1)$

الدالة $g$ هي جداء الدالة $\exp$ بعدد حقيقي موجب $\exp(-1)$ ومنه

$g'(x)=\exp'(x)\exp(-1)=\exp(x-1)$ إذن $g'(x)\rangle 0$ و منه $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- $h(x)=(\exp(-x))^2=\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^2$ إذن الدالة $h$ من الشكل $\left(\frac{1}{u}\right)^2$ حيث $u(x)=\exp(x)$

$$h'(x)=\frac{-2\exp(x)}{(\exp(x))^3}=\frac{-2}{(\exp(x))^2}=-2\exp(-2x)$$

لكن $\exp(-2x)\rangle 0$ إذن $h'(x)\langle 0$ و منه نستنتج ان $h$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ .

ب) $g'(x)=\exp(x-1)=g(x)$ و $h'(x)=-2\exp(-2x)=-2h(x)$

## تمرين تدريبي 2

أ) بسط العبارات التالية :

$A=(\exp(x))^3$ ، $B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)$ ، $C=\dfrac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}$ .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $\dfrac{\exp x}{\exp x-x}=\dfrac{1}{1-x\exp(-x)}$

و $\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\dfrac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$

### ✓ الحل

أ) $A=(\exp(x))^3=\exp(x)\times\exp(x)\times\exp(x)=\exp(2x)\times\exp(x)=\exp(3x)$

$B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)=\exp(3-2x+5x-7)=\exp(-4+3x)$

$$C=\frac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}=\frac{\exp(3x-1)}{(\exp(3x))^{-1}}=\exp(3x-1)\times\exp(3x)=\exp(3x-1+3x)$$

$$=\exp(6x-1)$$

ب) $$\frac{\exp(x)}{\exp(x)-x}=\frac{\exp(x)}{\exp(x)[1-x\exp(-x)]}=\frac{1}{1-x\exp(-x)}$$

$$\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\frac{\exp(x)\left[1-\frac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}{\exp(x)\left[1+\frac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}=\frac{1-(\exp(-x))^2}{1+(\exp(-x))^2}=\frac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$$

## 4- الترميز $e^x$

صورة الواحد بالدالة الأسية نرمز له بـ $e$ أي $\exp(1)=e$ .

العدد $e$ هو عدد حقيقي و القيمة التقريبية له هي $2,71828$

الخواص المبرهنة في الفقرة السابقة تسمح لنا بكتابة $\exp(n)=\exp(n\times1)=(\exp(1))^n=e^n$ من أجل كل عدد صحيح $n$ .

نرمز بـ $e^x$ إلى صورة العدد الحقيقي $x$ بالدالة الأسية و نكتب $\exp(x)=e^x$

### ملاحظة

العدد $e$ عدد غير ناطق.





### خواص

خواص الدالة الأسية المبرهنة في الفقرة السابقة تكتب بالترميز الجديد كمايلي :

1) الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها

2) $e^0=1$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $e^x>0$ .

3) مهما يكن العددان الحقيقيان $a$ و $b$ و العدد الصحيح $n$ :

$$e^{a+b}=e^a\times e^b \quad ، \quad e^{-a}=\frac{1}{e^a} \quad ، \quad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b} \quad ، \quad (e^a)^n=e^{na}$$

4) من أجل كل الأعداد الحقيقية $a_1$ ، $a_2$ ، .... ، $a_p$ حيث $p$ عدد طبيعي لدينا

$$e^{a_1}e^{a_2}\times...\times e^{a_p}=e^{a_1+a_2+...+a_p}$$

## تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية :

$A=e^{-3}\times(e^2)^4$ ، $B=(e^{-x})\times(e^x)^3$

$C=e^{2x}\times e^{-2x}$ ، $D=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}-\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$

### ✓ الحل

$A=e^{-3}\times e^8=e^{-3+8}=e^5$

$B=e^{-x}\times(e^x)^3=e^{-x}\times e^{3x}=e^{-x+3x}=e^{2x}$

$C=e^{2x}\times e^{-2x}=e^{2x-2x}=e^0=1$

$$D=\frac{e^{-x}}{e^x+1}-\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^x e^{-x}}{e^{2x}+e^x}-\frac{e^{-2x}e^{2x}}{e^{2x}+e^{-x}e^{2x}}$$

$$=\frac{e^0}{e^{2x}+e^x}-\frac{e^0}{e^{2x}+e^x}=\frac{1}{e^{2x}+e^x}-\frac{1}{e^{2x}+e^x}=0$$

## 5- دراسة الدالة الأسية

### 1.5 اتجاه التغير والنهايات

مبرهنة

1) الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) إذا كان $x>0$ فإن $e^x>1$ و إذا كان $x<0$ فإن $e^x<1$ .

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

4) $\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$ و من اجل $h$ قريب من الصفر $e^h\approx1+h$

**الإثبات**

1) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp'(x)=\exp(x)$ و $\exp(x)>0$

إذن الدالة الأسية متزايدة على $\mathbb{R}$

2) بما ان الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على المجال $[0,+\infty[$ و $\exp(0)=1$

فإنه من اجل كل $x>0$ يكون $\exp(x)>1$

- بما ان الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على $]-\infty,0]$ و $\exp(0)=1$

فإنه من اجل كل $x<0$ يكون $\exp(x)<1$

3) لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-x$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^x-1$ و $f'(0)=0$

- على المجال $]-\infty,0[$ لدينا $f'(x)<0$ و منه $f$ متناقصة تماما على مجال $]-\infty,0]$ .

- على المجال $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

و بما ان $f(0)=1$ فإن الدالة $f$ تقبل قيمة حدية صغرى تساوي 1 .

إذن من اجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $f(x)\geq1$

و منه نستنتج ان $f(x)>0$ على $\mathbb{R}$ و هذا يعني ان $e^x>x$ .

و بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ( حسب نظرية الحصر)

- نضع $X=-x$ و بالتالي لما $x$ يؤول إلى $(-\infty)$ فإن $X$ يؤول إلى $(+\infty)$ .

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{X\to+\infty}e^{-X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$$

4) - الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق عند الصفر وعددها المشتق عند الصفر هو 1

و منه نستنتج بالتعريف ان $\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$

- من النهاية السابقة نستنتج ان في جوار الصفر $e^h=1+h+\phi(h)$ حيث $\lim\limits_{h\to0}\varphi(h)=0$

إذن $e^h\approx1+h$ بجوار الصفر.

**تمرين تدريبي 1**

لتكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين بـ $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+1}$ ، $g(x)=\frac{e^x-1}{x^3}$ .

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ثم احسب $\lim\limits_{x\to0}g(x)$





✓ **الحل**

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x^2}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

**تمرين تدريبي 2**

1) باستعمال التقريب التالفي لـ $e^x$ برهن انه عندما يكون العدد الطبيعي $n$ كبيرا بالقدر الكافي يكون $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) لتكن $(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ بـ $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ احسب بتقريب $10^{-10}$ الحدود $U_{100}$ ، $U_{1000}$ ثم قارنها مع $e$ .

✓ **الحل**

1) بجوار الصفر لدينا $e^h\approx h+1$

و بوضع $h=\frac{1}{n}$ مع $n$ كبير بالقدر الكافي نجد $e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}$

و برفع الطرفين إلى القوة $n$ نجد $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ اي $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) $U_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2,7048138294$

$U_{1000}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2,7169239325$

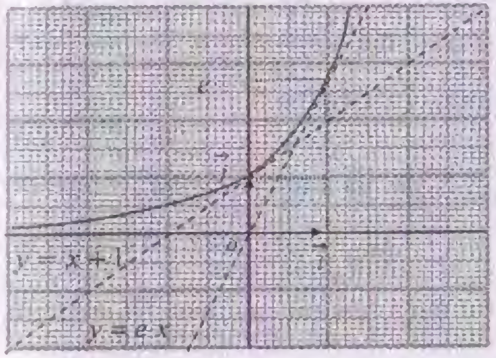
نلاحظ ان $U_{100}$ و $U_{1000}$ قيم مقربة إلى $10^{-10}$ للعدد $e$

و كلما كان $n$ كبيرا جدا كلما اقتربنا من العدد $e$

و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=e$

## 5.2 جدول تغيرات و المنحنى البياني للدالة الأسية

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\exp'(x)$ | | + | | | |
| $\exp(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |




- المنحني الممثل للدالة exp يقبل المستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب له بجوار $(-\infty)$
- المماسان لمنحني الدالة exp عند 1 و 0 معادلتاهما على الترتيب $y=ex$ و $y=x+1$
- بما أن $e^x > x$ من أجل كل $x$ فإن المنحني الممثل للدالة exp يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=x$

## 5.3 الوضع النسبي لبيان الدالة exp و مماساته

نسمي $(\gamma)$ المنحني البياني للدالة exp في معلم متعامد ومتجانس، و ليكن $a$ عدد حقيقي و لتكن $M(a, e^a)$ نقطة من $(\gamma)$.

معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(\gamma)$ عند $M$ هي $y=e^a+e^a(x-a)$.

لدراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(T)$ ندرس إشارة المقدار $e^x-\left[e^a+e^a(x-a)\right]$.

نضع $f(x)=e^x-\left[e^a+e^a(x-a)\right]$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما : $x\mapsto e^x$ و $x\mapsto -\left[e^a+e^a(x-a)\right]$ و لدينا $f'(x)=e^x-e^a$

بما أن الدالة exp متزايدة تماما فإن

- إذا كان $x>a$ يكون $e^x>e^a$ و عليه $f'(x)>0$
- إذا كان $x<a$ يكون $e^x<e^a$ و عليه $f'(x)<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | $f(a)=0$ | ↗ | |

• من جدول تغيرات $f$ نلاحظ انه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)\ge 0$ وهذا يعني أن المنحني للدالة exp يقع فوق المماس $(T)$ و يمسه في النقطة الوحيدة $M(a,e^a)$.





## 5.4 نهايات شهيرة

مبرهنة

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

الإثبات

لتكن $f$ دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.

$f$ و $f'$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^x-x$ و $f''(x)=e^x-1$.

من أجل كل $x$ من $[0,+\infty[$ لدينا $f''(x)\ge 0$ و منه الدالة $f'$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

بما أن $f'(0)=1$ فإن $f'(x)>0$ و عليه فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

و بما أن $f(0)=1$ فإن $f(x)\ge 1>0$.

$f(x)>0$ يكافئ $e^x>\frac{x^2}{2}$ بالقسمة على العدد الحقيقي الموجب تماما $x$ نجد $\frac{e^x}{x}>\frac{x}{2}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

• بوضع $X=-x$ يكون $x e^x=-X e^{-X}=\frac{-X}{e^X}=\frac{-1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{-1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}=0$ لأن $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$

ملاحظة

من أجل قيم كبرى لـ $x$ ، فالعددان $x$ و $e^x$ يأخذان قيما كبرى جدا و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ فإن $e^x$ أكبر بكثير عن $x$ نقول أن الدالة الأسية تتفوق عن الدالة $x\mapsto x$.

تمرين تدريبي 1

1) $f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-2x+1$ و $g(x)=\frac{3e^x-2}{e^x+2}$

احسب نهايات $f$ و $g$ عند $+\infty$ و $-\infty$

2) $h$ و $k$ دالتان معرفتان كما يلي $h(x)=\frac{x+2}{3e^x-1}$ و $k(x)=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

أ) احسب نهاية $h$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) احسب نهاية $k$ عند $(+\infty)$ ، $(-\infty)$ و 1

✓ الحل

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(3-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = 3$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3e^x-2}{e^x+2} = -\frac{2}{2} = -1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x+1\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+1)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{-2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}+\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

(2 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{3e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{e^x\left(3-\frac{1}{e^x}\right)} = 0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{3e^x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{3e^x-1} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3e^x-1\right)=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X-1}{X}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}-1\right)\times\frac{1}{x-1} = 0$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}-1\right)=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to1} k(x) = \lim\limits_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}=1$ حيث $X=x-1$





## تمرين تدريبي ❷

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-x-2$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة $f$.

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ لها حلان في $\mathbb{R}$. ثم ارسم $(\gamma)$.

✓ الحل

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)=+\infty$

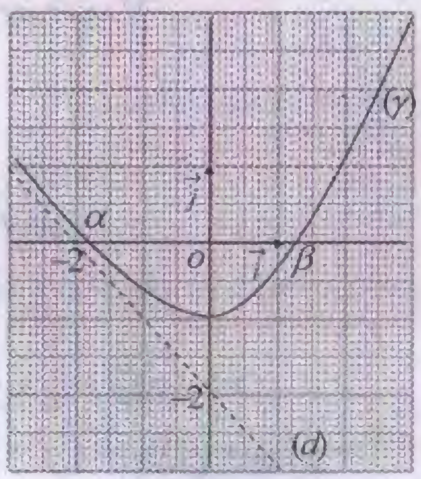
لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

• $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^x-1$.

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$.

- إذا كان $x>0$ فإن $e^x>1$ و بالتالي $f'(x)>0$ أي $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.
- إذا كان $x<0$ فإن $e^x<1$ و بالتالي $f'(x)<0$ أي $f$ متناقصة تماما على $]-\infty,0]$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| تغيرات $f$ | $+\infty$ ↘ | $-1$ | ↗ $+\infty$ |




(2 - بما أن $f'<0$ على المجال $]-\infty,0[$ و $0\in]-1,+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha$ من $]-\infty,0[$

- بما أن $f'>0$ على المجال $]0,+\infty[$ و $0\in]-1,+\infty[$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ لها حلا وحيدا $\beta$ من $]0,+\infty[$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ على $\mathbb{R}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x-2)=0$ فإن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=-x-2$ مقارب لـ $(\gamma)$ بجوار $-\infty$

## 5.5 المعادلات والمتراجحات

### خاصية

1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب تماما $m$ فالمعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ونرمز له بـ $Ln(m)$ ونكتب $x = Ln(m)$

2) من اجل كل عددين حقيقين $a$ و $b$ :

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$

### الإثبات

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالإضافة إلى كونها متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنها تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0,+\infty[$.

إذن من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما $m$ فالمعادلة ذات المجهول $x$ التالية $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا الذي نرمز له بـ $Ln(m)$.

2) بما أن الدالة الأسية تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0,+\infty[$ ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$.

### ملاحظة

بما أن المعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا هو $Ln(m)$ فإنه يمكن كتابة $e^{Ln(m)} = m$ .

### تمرين تدريبي ❶

بسط الأعداد التالية ، $A = e^{Ln(2)-Ln(3)}$ ، $B = \dfrac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}}$ ، $C = e^{-2Ln(3)}$

$D = e^{2Ln(3)}$ ، $E = e^{Ln(3)-2Ln(2)}$

✓ الحل

$$A = e^{Ln(2)} \times e^{-Ln(3)} = 2 \times \frac{1}{e^{Ln(3)}} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$C = e^{-2Ln(3)} = \frac{1}{e^{2Ln(3)}} = \frac{1}{\left(e^{Ln(3)}\right)^2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$D = e^{2Ln(3)} = \left(e^{Ln(3)}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$E = e^{Ln(3)-2Ln(2)} = e^{Ln(3)} \times \frac{1}{e^{2Ln(2)}} = 3 \times \left(\frac{1}{e^{Ln(2)}}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$







### تمرين تدريبي ❷

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{x^2+3x} = e^4$ ، ب) $e^{2x+1} < e^{x^2-x-3}$ ، جـ) $e^{-3x+2} \geq 3$

✓ الحل

المعادلتان $e^{U(x)} = e^{V(x)}$ و $U(x) = V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول

المتراجحتان $e^{U(x)} < e^{V(x)}$ و $U(x) < V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول

أ) المعادلتان $e^{x^2+3x} = e^4$ و $x^2+3x = 4$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المعادلة $x^2+3x = 4$ تكافئ المعادلة $x^2+3x-4 = 0$ التي حلاها هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -4$

إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{x^2+3x} = e^4$ هي $S = \{1, -4\}$.

ب) المتراجحتان $e^{2x+1} < e^{x^2-x-3}$ و $2x+1 < x^2-x-3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المتراجحة $2x+1 < x^2-x-3$ تكافئ المتراجحة $x^2-3x-4 > 0$

و هذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]-\infty,-1[ \cup ]4,+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = ]-\infty,-1[ \cup ]4,+\infty[$

جـ) بما أن $e^{Ln3} = 3$ فإن المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل $e^{-3x+2} \geq e^{Ln3}$

المتراجحتان $e^{-3x+2} \geq e^{Ln3}$ و $-3x+2 \geq Ln3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

مجموعة حلول المتراجحة $-3x+2 \geq Ln3$ هي $\left]-\infty, \frac{2-Ln3}{3}\right[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S = \left]-\infty, \frac{2-Ln3}{3}\right[$

### تمرين تدريبي ❸

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{2x} = \left(e^{-x}\right)^2 \times e^{-3}$ ، ب) $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ ، جـ) $e^{-x} - 3 \geq 0$

✓ الحل

لحل معادلة من الشكل $a e^{2x} + b e^x + c = 0$ نضع $e^x = X$

الحلول (في حالة وجودها) هي الأعداد $x_0$ بحيث $x_0 = Ln(X_0)$ حيث $X_0$ هو الحل الموجب للمعادلة $a X^2 + b X + c = 0$

أ) $\left(e^{-x}\right)^2 \times e^{-3} = e^{-2x} \times e^{-3} = e^{-2x-3}$

و منه المعادلة (أ) تكتب على الشكل $e^{2x} = e^{-2x-3}$

و هذه الأخيرة تكافئ $2x=-2x-3$

مجموعة حلول المعادلة $2x=-2x-3$ هي $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

و منه مجموعة حلول المعادلة أ) هي $S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

ب) بوضع $X=e^x$ المعادلة ب) تكتب على الشكل (I)... $X^2-3X-4=0$

حلا المعادلة (I) هما $X_0=4$ و $X_1=-1$

$X_1=-1$ مرفوض و $X_0=4$ مقبول

"$X_0=e^x$" يكافئ $x_0=Ln(X_0)=Ln 4$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{Ln 4\}$.

جـ) $e^{-x}-3\ge 0$ يكافئ $e^{-x}\ge e^{Ln 3}$ يكافئ $-x\ge Ln 3$ يكافئ $x\le -Ln 3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=]-\infty, -Ln 3]$

## 6. الدالة المركبة $x\mapsto e^{u(x)}$

دراسة هذا النوع من الدوال تعتمد على مبرهنة نهاية دالة مركبة واشتقاق دالة مركبة.

الدالة exp معرفة على $\mathbb{R}$ و بالتالي مجموعة تعريف الدالة $\exp ou$ هي مجموعة تعريف الدالة $u$

**مبرهنة**

1) إذا كانت الدالة $u$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ فإن الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=(\exp ou)(x)=e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

2) اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة $u$

**الإثبات**

1) $f'(x)=(\exp ou)'(x)=u'(x)\times \exp'(u(x))$

لكن $\exp'(u(x))=e^{u(x)}$ و عليه $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$

2) بما أن $e^{u(x)}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $u'(x)$

و عليه فإن اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة $x\mapsto u(x)$

**مثال 1**

عين المجال الذي تكون فيه الدالة $f$ قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=e^{2x+3}$ ، ب) $f(x)=e^{2x^2+x}$ ، جـ) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

د) $f(x)=e^{\sin x}$ ، هـ) $f(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}$





✓ **الحل**

أ) الدالة $x\xrightarrow{u}2x+3$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2\times e^{2x+3}$

ب) الدالة $x\xrightarrow{u}2x^2+x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(4x+1)e^{2x^2+x}$

جـ) الدالة $x\xrightarrow{u}\frac{1}{x}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ و لدينا $f'(x)=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

د) الدالة $x\xrightarrow{u}\sin(x)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$

هـ) الدالة $x\mapsto\frac{x}{x^2+1}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x}{x^2+1}}$

**تمرين تدريبي 1**

احسب نهاية الدالة $f$ عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{2x+3}$ ، 2) $f(x)=e^{\frac{2x+1}{x-2}}$

3) $f(x)=e^{-x^2}$ ، 4) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

✓ **الحل**

1) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}2x+3$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$

ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}\frac{2x+1}{x-2}$ عند $(+\infty)$ هي 2

و نهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند 2 هي $e^2$ و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^2$

3) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}-x^2$ عند $(+\infty)$ هي $(-\infty)$

ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ لما $x$ يؤول $(-\infty)$ هي 0 و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

4) $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

## تمرين تدريبي 2

لتكن $f_k$ و $g_k$ دالتين معرفتين كما يلي $f_k(x)=e^{-kx}$ و $g_k(x)=e^{-kx^2}$
مع $k>0$ ، $(\gamma_k)$ و $(\Gamma_k)$ المنحنيين الممثلين لـ $f_k$ و $g_k$ على الترتيب في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) ادرس تغيرات الدالة $f_k$

ب) ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ ثم ارسم $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$

2) أ) ادرس تغيرات الدالة $g_k$

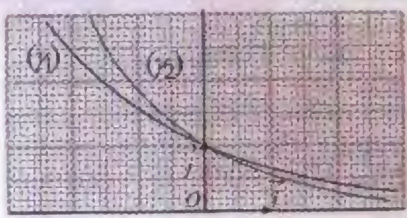
ب) ادرس الوضع النسبي لـ $(\Gamma_1)$ و $(\Gamma_2)$ ثم ارسم $(\Gamma_1)$ و $(\Gamma_2)$

### ✓ الحل

1) أ) الدالة $x \xrightarrow{u} -kx$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة $f_k$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'_k(x) = (-k)e^{-kx}$

بما أن $k>0$ فإن من اجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $f'_k(x)<0$ أي أن $f_k$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ .

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $f'_k$ | $-$ | |
| تغيرات $f_k$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |




بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(-kx)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx}=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(-kx)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-kx}\right)=+\infty$

ب) لدراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ ندرس إشارة الفرق $f_2(x)-f_1(x)$ .

$$f_2(x)-f_1(x) = e^{-2x}-e^{-x} = e^{-x}\left(e^{-x}-1\right) = e^{-x}\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)$$

$f_2(x)-f_1(x)=0$ يكافئ $1-e^x=0$ يكافئ $x=0$

- إذا كان $x>0$ فإن $f_2(x)-f_1(x)<0$ و بالتالي $(\gamma_2)$ تقع تحت $(\gamma_1)$
- إذا كان $x<0$ فإن $f_2(x)-f_1(x)>0$ وبالتالي $(\gamma_2)$ تقع تحت $(\gamma_1)$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني $(\gamma_k)$ في جوار $(-\infty)$

2) دراسة تغيرات الدالة $g_k$





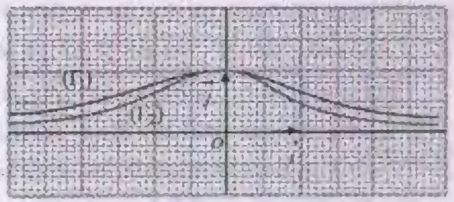
الدالة $x \xrightarrow{v} -kx^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
اذن الدالة $g_k$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
و لدينا $g'_k(x)=-2kxe^{-kx^2}$
$g'_k(x)=0$ يكافئ $x=0$

- إذا كان $x>0$ فإن $g'_k(x)<0$ و بالتالي $g_k$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$
- إذا كان $x<0$ فإن $g'_k(x)>0$ و بالتالي $g_k$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-kx^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-kx^2)=-\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x)=0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $g'_k(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| تغيرات $g_k$ | $0$ ↗ | $1$ | ↘ $0$ |




ب) لدراسة الوضع النسبي لـ $(\Gamma_1)$ و $(\Gamma_2)$ ندرس إشارة المقدار $g_2(x)-g_1(x)$

$$g_2(x)-g_1(x) = e^{-2x^2}-e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(\frac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}}\right)$$

$g_2(x)-g_1(x)=0$ يكافئ $x=0$

من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $x^2>0$

وبما أن الدالة $\exp$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

فإن $e^{x^2}>e^0$ أي $e^{x^2}>1$

إذن $g_2(x)-g_1(x)<0$ و هذا يعني أن $(\Gamma_2)$ يقع تحت $(\Gamma_1)$

- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ $(\Gamma_1)$ و $(\Gamma_2)$ في جوار $+\infty$ و $-\infty$
- الدالة $g_k$ زوجية وبالتالي منحناها يقبل المستقيم $(x=0)$ كمحور تناظر له

## 7 - المعادلات التفاضلية

تسمى معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة ومشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال $I$ يعني إيجاد كل الدوال $f$ القابلة للاشتقاق على $I$ و التي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق فقط إلى المعادلات التفاضلية من الشكل، $y'=ay+b$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان و $a\neq 0$

## 1.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$.

**مبرهنة 1**

حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$ على $\mathbb{R}$ هي دوال $f_k$ المعرفة بـ $f_k(x)=k\,e^{ax}$ حيث $k$ عدد حقيقي كيفي.

**الإثبات**

من اجل كل عدد حقيقي $k$ لدينا $f_k'(x)=a\,k\,e^{ax}$

إذن $f_k'(x)=a\,f_k(x)$ و هذا يعني أن $f_k$ حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$.

• وحدانية الدوال $f_k$ :

لإثبات أن الدوال $f_k$ هي الدوال الوحيدة التي تحقق $y'=ay$

نفرض أنه توجد دوال $g$ حلول للمعادلة $y'=ay$ و نبين أن $g$ من الشكل $f_k$.

لتكن $h$ دالة معرفة بـ $h(x)=g(x)e^{-ax}$

الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $h'(x)=e^{-ax}(g'(x)-a\,g(x))$

بما أن $g$ حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ فإن $g'(x)-a\,g(x)=0$

و عليه نجد $h'(x)=0$

إذن الدالة $h$ ثابتة

وهذا يعني من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $h(x)=k$

إذن $g(x)=k\,e^{ax}$

**مبرهنة 2**



من اجل كل ثنائية $(x_0\,,y_0)$ المعادلة $y'=ay$ تقبل حلا وحيدا $f$ بحيث $f(x_0)=y_0$

**الإثبات**

القول ان $f_k(x_0)=y_0$ يكافئ القول أن $k\,e^{ax_0}=y_0$

إذن لا توجد إلا قيمة وحيدة ممكنة لـ $k$ هي $y_0\,e^{-ax_0}$

و الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=y_0\,e^{a(x-x_0)}$

**مثال .** ◆

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y'=-3y$ مع $(x_0\,,y_0)=(1\,,3)$

✓ **الحل**

حل المعادلة التفاضلية المعطاة هي الدالة $f$ المعرفة من اجل كل $x$ بالعبارة $f(x)=y_0\,e^{a(x-x_0)}$ و بتعويض $a$ و $x_0$ و $y_0$ نجد $f(x)=3\,e^{-3(x-1)}$





## 2.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$

**مبرهنة**

الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$ هي الدوال $f_k$ المعرفة من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=k\,e^{ax}-\dfrac{b}{a}$ حيث $k$ عدد حقيقي كيفي.

**الإثبات**

نفرض أن الدالة $f$ القابلة للاشتقاق على $I$ هي حلا للمعادلة $y'=ay+b$ عندئذ نضع من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ نضع $g(x)=f(x)+\dfrac{b}{a}$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f'(x)$

لكن $f'(x)=a\,f(x)+b=a\,g(x)$

إذن $g'(x)=a\,g(x)$ و هذا ما يثبت أن $g$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$

إذن $g$ هي الدالة $x\mapsto k\,e^{ax}$ حيث $k$ عدد حقيقي كيفي.

بالعكس كل دالة $f$ من الشكل $x\mapsto k\,e^{ax}-\dfrac{b}{a}$ هي حل للمعادلة $y'=ay+b$ لأنه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=k\,a\,e^{ax}$ و $f'(x)=a\,f(x)+b$.

و عليه حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال $f_k$ المعرفة بـ $f_k(x)=k\,e^{ax}-\dfrac{b}{a}$

**ملاحظة**

المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات $a$ و $b$ ثابتة.

**تمرين تدريبي**

أوجد الدالة $f$ حلا للمعادلة التفاضلية $y+y'=1\ldots(E)$ بحيث $f(0)=2$

✓ **الحل**

المعادلة التفاضلية $(E)$ تكتب على الشكل $y'=-y+1$

الحل العام لهذه الأخيرة هي الدوال $f_k$ المعرفة من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=k\,e^{-x}+1$

$f_k(0)=2$ يكافئ $k+1=2$ يكافئ $k=1$.

منه الدالة $f$ المطلوبة معرفة كما يلي $f(x)=e^{-x}+1$

# تطبيقات نموذجية

## تطبيق 1 تبسيط عبارة

1) بسط العبارات التالية : $A=(\exp(x))^4$ ، $B=\dfrac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}$ ، $C=\dfrac{\exp(2x)\times\exp(x)}{\exp(5x+1)}$

2) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $\dfrac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3}=1-\dfrac{6}{\exp(x)+3}$

✓ الحل

1)
$$A=(\exp(x))^4=(\exp(x))^2\times(\exp(x))^2=\exp(2x)\times\exp(2x)=\exp(4x)$$
$$B=\frac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}=\frac{\exp(7x-3)}{(\exp(7x))^{-1}}=\exp(7x-3)\exp(7x)$$
$$=\exp(7x-3+7x)=\exp(14x-3)$$
$$C=\frac{\exp(2x)\exp(x)}{\exp(5x+1)}=\frac{\exp(3x)}{\exp(5x+1)}=\exp(3x)\times\exp(-5x-1)=\exp(-2x-1)$$

2)
$$\frac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3}=\frac{\exp(x)+3-6}{\exp(x)+3}=1-\frac{6}{\exp(x)+3}$$

## تطبيق 2 تبسيط الأعداد

بسط الأعداد التالية : $A=e^{-Ln(2)}+e^{Ln(3)}$ ، $B=\dfrac{2}{e^{-1+3Ln(2)}}$ ، $C=\dfrac{e^{3x}}{(e^x)^3}$

✓ الحل

$$A=\frac{1}{e^{Ln(2)}}+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$$
$$B=\frac{2}{e^{-1+3Ln(2)}}=\frac{2}{e^{-1}\times e^{3Ln(2)}}=\frac{2}{e^{-1}\times(e^{Ln(2)})^3}=\frac{2}{e^{-1}\times 2^3}=\frac{e}{4}$$
$$C=\frac{e^{3x}}{(e^x)^3}=\frac{e^{3x}}{e^{3x}}=e^{3x-3x}=e^0=1$$





## تطبيق 3 مركز تناظر لبيان دالة

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1) بين ان $f(-x)+f(x)=2$ ماذا تستنتج ؟

2) تحقق من ان $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$

✓ الحل

1)
$$f(-x)+f(x)=\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}=\frac{\frac{3}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}$$
$$=\frac{3-e^x}{1+e^x}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}=\frac{3-e^x+3e^x-1}{1+e^x}=\frac{2+2e^x}{1+e^x}=2$$

منه نستنتج النقطة $A(0,1)$ مركز تناظر لبيان $f$

2)
$$f(x)=\frac{3e^x-1}{e^{-x}+1}=\frac{4e^x-(e^x+1)}{e^x+1}=\frac{4e^x}{e^x+1}-1$$

## تطبيق 4 كيفية التحقق من صحة مساواة

تحقق من صحة المساواة المعطاة من أجل كل $x$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\dfrac{e^x}{2+e^x}=\dfrac{1}{2e^{-x}+1}$ 2) $\dfrac{e^x}{e^x-x}=\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$

3) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ 4) $\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=1-\dfrac{3}{e^x+1}$

✓ الحل

1)
$$\frac{e^x}{2+e^x}=\frac{e^x}{e^x\left(\frac{2}{e^x}+1\right)}=\frac{1}{2e^{-x}+1}$$

2)
$$\frac{e^x}{e^x-x}=\frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=\frac{1}{1-xe^{-x}}$$

3)
$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

4)
$$\frac{e^x-2}{e^x+1}=\frac{e^x+1-3}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{3}{e^x+1}=1-\frac{3}{e^x+1}$$

## تطبيق 5 تعيين مجموعة حلول معادلة

- حل المعادلات التالية :

ا) $e^{3x}=1$ ، ب) $e^{-\frac{1}{x}}=e^{x+2}$ ، جـ) $2e^{-2x}=\frac{1}{e^{2x}-2}$

د) $(e^{-x}-5)(e^{2x}-e)=0$ ، هـ) $\frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}}=3$

### ✓ الحل

ا) $e^{3x}=1$ تكافئ $e^{3x}=e^0$ تكافئ $3x=0$ تكافئ $x=0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (ا) هي $S=\{0\}$

ب) مجموع تعريف المعادلة (ب) هي $\mathbb{R}-\{0\}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{-\frac{1}{x}}=e^{x+2}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-\frac{1}{x}=x+2$

و هذه الأخيرة تكتب على الشكل $x^2+2x+1=0$ و حلها هو $x=-1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{-1\}$

جـ) المجموعة التي تكون فيها المعادلة (جـ) لها معنى هي $\mathbb{R}-\{0\}$

المعادلة (جـ) تكتب على الشكل $e^{-2x}=\frac{1}{4}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{-2x}=\frac{1}{4}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-2x=Ln\left(\frac{1}{4}\right)$

وحلول هذه الأخيرة هي $x=-\frac{1}{2}Ln(4)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\left\{-\frac{1}{2}Ln(4)\right\}$

د) مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $]-\infty , +\infty[$ .

$(e^{-x}-5)(e^{2x}-e)=0$ تكافئ $e^{-x}-5=0$ أو $e^{2x}-e=0$

$e^{-x}-5=0$ تكافئ $e^{-x}=5$ و منه $-x=Ln(5)$ اي $x=-Ln(5)$

$e^{2x}-e=0$ تكافئ $e^{2x}=e^1$ ومنه $2x=1$ أي $x=\frac{1}{2}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S=\left\{\frac{1}{2} , -Ln(5)\right\}$

هـ) مجموعة تعريف المعادلة (هـ) هي $\mathbb{R}$ .

المعادلة (هـ) تكتب على الشكل $e^{-x}=3+6e^{-x}$ و منه $e^{-x}=\frac{-3}{5}$





بما أن $\frac{-3}{5}<0$ و $e^{-x}>0$ فإن المعادلة $e^{-x}=\frac{-3}{5}$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (هـ) هي مجموعة خالية.

## تطبيق 6 تعيين مجموعة حلول متراجحة

حل المتراجحات التالية :

ا) $e^{2x}\geq 1$ ، ب) $3e^{-x}-2\geq 0$ ، جـ) $(e^x+3)(2-e^x)\geq 0$

د) $\frac{e^x-1}{e^x}\geq 0$ ، هـ) $e^{-x^2-x}\leq 1$ ، و) $e^x-\frac{9}{e^x}<0$

### ✓ الحل

ا) مجموعة تعريف المتراجحة (ا) هي $\mathbb{R}$ .

المتراجحة (ا) تكتب على الشكل $e^{2x}\geq e^0$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $2x\geq 0$ أي $x\geq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ا) هي $S=[0 , +\infty[$

ب) مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $\mathbb{R}$ .

المتراجحة (ب) تكتب على الشكل $e^{-x}\geq\frac{2}{3}$ أي $e^{-x}\geq e^{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $-x\geq Ln\left(\frac{2}{3}\right)$ .

مجموعة حلول المتراجحة $-x\geq Ln\left(\frac{2}{3}\right)$ هي $\left]-\infty , -Ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left]-\infty , -Ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

جـ) مجموعة تعريف المتراجحة (جـ) هي $\mathbb{R}$ .

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $e^x+3>0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي نفس حلول المتراجحة $2-e^x\geq 0$

$2-e^x\geq 0$ تعني $e^x\leq 2$ .

مجموعة حلول المتراجحة $e^x\leq 2$ هي $]-\infty , Ln(2)]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=]-\infty , Ln(2)]$

د) المتراجحة $\frac{e^x-1}{e^x}\geq 0$ تكافئ $e^x-1\geq 0$ أي $e^x\geq 1$ .

مجموعة حلول المتراجحة $e^x\geq 1$ هي $[0 , +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=[0 , +\infty[$

هـ) مجموعة حلول المتراجحة $e^{-x^2-x} \leq 1$ هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $-x^2-x \leq 0$

و لكن مجموعة حلول المتراجحة $-x^2-x \leq 0$ هي $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S = ]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

و) المتراجحة (و) تكتب على الشكل $\frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x} > 0$

و بما أن $\frac{e^x+3}{e^x} > 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة (و) هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $e^x-3 > 0$ و هذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]-\infty, Ln(3)[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (و) هي $S = ]-\infty, Ln(3)[$

## تطبيق 7 تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

1) عين جذور كثيرة الحدود من الدرجة الثانية حيث $p(x) = x^2+4x-5$

2) استنتج حلول المعادلة $(E)$ .... $e^{2x}+4e^x=5$

3) حل المتراجحة التالية $e^{2x}+4e^x-5 \leq 0$ ... $(E')$

✓ الحل

1) $\Delta = 16-4(1)(-5) = 36$

بما أن $\Delta > 0$ فإن لـ $p(x)$ جذرين هما 1 و $-5$

2) بوضع $e^x = X$ المعادلة $(E)$ تكتب $X^2+4X-5=0$

و من السؤال الأول نجد أن $X=1$ أو $X=-5$

$X=-5$ مرفوض لأن $X > 0$ .

$X=1$ يكافئ $e^x=1$ يكافئ $x=0$

و منه مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي $S=\{0\}$

3) المتراجحة $(E')$ تكتب على الشكل $(e^x-1)(e^x+5) \leq 0$

بما أن $e^x+5 > 0$ فإن مجموعة حلول $(E')$ هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $e^x-1 \leq 0$

$e^x-1 \leq 0$ يكافئ $x \leq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة $(E')$ هي $S = ]-\infty, 0]$

## تطبيق 8 تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

أ) $\frac{e^{-x}+1}{e^x-1} = 4$ ، ب) $e^{3x+4}+4e^{2x+3}-5e^{x+2}=0$





جـ) $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x} = e^{x+2}$ ، د) $\frac{e^{x+1}-2}{e^{x+1}+2} \leq \frac{e^{x+1}-1}{e^{2x+2}+1}$

هـ) $4e^{2x}-e^{-2x} \leq 3$

✓ الحل

أ) مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $\mathbb{R}-\{0\}$

المعادلة (أ) تكتب على الشكل $4e^{2x}-5e^x-1=0$ ... $(1)'$

بوضع $e^x = X$ المعادلة $(1)'$ تكتب على الشكل $4X^2-5X-1=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $X_1 = \frac{5+\sqrt{39}}{8}$ و $X_2 = \frac{5-\sqrt{39}}{8}$

$X_2$ حل مرفوض لأنه سالب.

$X = X_1$ يكافئ $e^x = X_1$ ومنه $x = Ln(X_1)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{Ln(X_1)\}$

ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $\mathbb{R}$ .

بضرب المعادلة (ب) في $e^{-2}$ نجد (1) ... $e^{3x+2}+4e^{2x+1}-5e^x=0$

و بوضع $e^x = X$ تصبح المعادلة (1) كما يلي $e^2X^3+4eX^2-5X=0$ ......$(1)'$

$e^2X^3+4eX^2-5X=0$ تكافئ $X(e^2X^2+4eX-5)=0$

يكافئ $(X=0)$ او $(e^2X^2+4eX-5=0)$

يكافئ $(X=0)$ او $\left(X=\frac{1}{e}\right)$ او $\left(X=\frac{-5}{e}\right)$

$X = \frac{-5}{e}$ مرفوض لأنه سالب و $X=0$ مرفوض لأنه معدوم.

$X = \frac{1}{e}$ يكافئ $e^x = \frac{1}{e}$ يكافئ $x=-1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{-1\}$

جـ) بوضع $e^x = X$ المعادلة (جـ) تصبح كما يلي $X^3-(e^2-1)X^2-e^2X=0$

وهذه الأخيرة تكتب على الشكل $X^2-(e^2-1)X-e^2=0$ لأن $X > 0$

حلا المعادلة $X^2-(e^2-1)X-e^2=0$ هما $e^2$ و $-1$

بما أن $X > 0$ فإن $-1$ مرفوض.

$X = e^2$ يكافئ $e^x = e^2$ منه $x=2$

إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\{2\}$

د) مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $\mathbb{R}$

بوضع $X = e^{x+1}$ المتراجحة (د) تكتب $\frac{X-2}{X+2} \leq \frac{X-1}{X^2+1}$

و بالتبسيط نجد $\frac{-X^2(X-3)}{(X^2+1)(X+2)} \le 0$ .................. $(I)$

وبما ان $\frac{X^2}{(X^2+1)(X+2)} \rangle 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $(I)$ هي نفس مجموعة حلول المتراجحة $-(X-3)\le 0$ أي $X\ge 3$

$X\ge 3$ يكافئ $e^{x+1}\ge 3$ يكافئ $x+1\ge Ln3$ يكافئ $x\ge -1+Ln3$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=[-1+Ln3\ ,\ +\infty[$ .

هـ) بضرب طرفي المتراجحة (هـ) في $e^{2x}$ نجد $4e^{4x}-3e^{2x}-1\le 0$ ... (1)

و بوضع $e^{2x}=X$ تصبح المتراجحة (1) كما يلي $4X^2-3X-1\le 0$ .... (1)'

و مجموعة حلول المتراجحة (1)' هي $]0,1[$

$X\in[0,1]$ يكافئ $1\rangle e^x\rangle 0$ يكافئ $x\langle 0$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S=]-\infty\ ,\ 0[$

## تطبيق 9 تعيين مجموعة حلول جملة معادلتين

- حل الجمل التالية :

أ) $\begin{cases}2e^x-e^y=e\\ e^x+2e^y=1\end{cases}$ ، ب) $\begin{cases}e^x+e^y=e+1\\ x+y=1\end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases}xy=-2\\ e^{4x}\times e^y=\frac{1}{e^2}\end{cases}$

✓ الحل

أ) بوضع $X=e^x$ و $Y=e^y$ الجملة (أ) تصبح كما يلي $\begin{cases}2X-Y=e & \dots (1)\\ X+2Y=1 & \dots (2)\end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في العدد 2 تصبح الجملة كما يلي

$$\begin{cases}4X-2Y=2e & \dots (1)'\\ X+2Y=1 & \dots (2)'\end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (1)' و (2)' طرفا لطرف نجد $5X=1+2e$ و منه $X=\frac{1+2e}{5}$

و بتعويض قيمة $X$ في المعادلة (2)' نجد $Y=\frac{1-X}{2}=\frac{2-e}{5}$

$X=\frac{1+2e}{5}$ يكافئ $e^x=\frac{1+2e}{5}$ يكافئ $x=Ln\left(\frac{1+2e}{5}\right)$

$Y=\frac{2-e}{5}\langle 0$ و منه $y$ غير موجود و بالتالي الجملة (أ) ليس لها حلولا في $IR^2$





ب) لدينا $x+y=1$ منه $y=1-x$ و بتعويض عبارة $y$ في المعادلة $e^x+e^y=e+1$

نجد $e^{2x}-(e+1)e^x+e=0$ .... (*)

بوضع $X=e^x$ المعادلة (*) تكتب $X^2-(e+1)X+e=0$ وحلا هذه الأخيرة هما $e$ و $1$

$X=1$ يكافئ $e^x=1$ يكافئ $x=0$

$X=e$ يكافئ $e^x=e$ يكافئ $x=1$

لما $x=0$ نجد $y=1$ و لما $x=1$ نجد $y=0$

و منه مجموعة حلول الجملة (ب) هي $S=\{(0,1)\ ,\ (1,0)\}$

جـ) الجملة (جـ) تكتب على الشكل $\begin{cases}xy=-2\\ e^{4x+y}=e^{-2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}xy=-2\\ 4x+y=-2\end{cases}$

من المساواة $xy=-2$ نجد $y=\frac{-2}{x}$ مع $x\neq 0$

نعوض عبارة $y$ في المعادلة $4x+y=-2$ نجد $4x-\frac{2}{x}=-2$

بالتبسيط نجد $4x^2+2x-2=0$ و حلا هذه الأخيرة هما $\frac{1}{2}$ و $-1$

لما $x=\frac{1}{2}$ نجد $y=-4$ و لما $x=-1$ نجد $y=2$ .

إذن مجموعة حلول الجملة (جـ) هي $\left\{\left(\frac{1}{2}\ ,\ -4\right),\ (-1,2)\right\}$

## تطبيق 10 حساب نهايات دالة

عين نهاية الدالة $f$ عند العدد المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{e^x-1}{3x}$ عند $0$ و $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) $f(x)=5xe^{-x}$ عند $-\infty$

جـ) $f(x)=\frac{2e^x-2}{2x-2}$ عند $+\infty$ و $(-\infty)$

د) $f(x)=e^{2x}-\frac{1}{e^{-x}}+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

هـ) $f(x)=2x-1+e^{-x}$ عند $(-\infty)$

✓ الحل

أ) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\times\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{3}$ لأن $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \times \frac{1-\frac{1}{e^x}}{3} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{3} = \frac{1}{3}$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^x - 1\right) \times \frac{1}{3x} = 0$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \left(e^x - 1\right) = -1$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

ب) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 5xe^{-x} = -\infty$

ج) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x - 2}{2x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\left[\frac{2-\frac{2}{e^x}}{2-\frac{2}{x}}\right] = +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{2}{e^x}}{2-\frac{2}{x}} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2e^x - 2\right) \times \frac{1}{2x-2} = 0^-$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \left(2e^x - 2\right) = -2$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x-2} = 0$

د) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) = +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right) = 1$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$

هـ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left[2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right] = +\infty$

## تطبيق 11 حساب العدد المشتق

عين المجال الذي تكون فيه الدالة $f$ قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية : أ) $f(x) = \left(x^2 - 3x\right)e^x$ ، ب) $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ ، ج) $f(x) = \frac{e^x - 1}{1+e^{-x}}$ ، د) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x+1}$ ، هـ) $f(x) = e^x \cos x$







✓ الحل

أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x \mapsto (x^2 - 3x)$ و $x \mapsto e^x$ و لدينا $f'(x) = 2xe^x + e^x(x^2 - 3x) = e^x\left(x^2 - x\right)$

ب) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق $\mathbb{R} - \{1\}$ و لدينا $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

ج) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}$

و لدينا $f'(x) = e^x \times \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}(e^x - 1 = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(1+e^{-x})^2}$

د) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$

و لدينا $f'(x) = \frac{e^x(x+1) - \left(e^x - 1\right)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x + 1}{(x+1)^2}$

هـ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto e^x$ و لدينا $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

## تطبيق 12 دراسة استمرارية و قابلية اشتقاق دالة عند عدد

$f$ دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 1 & , \ x \leq 1 \\ f(x) = 2 - x & , \ x > 1 \end{cases}$

1) عين مجموعة التعريف الدالة $f$

2) ادرس استمرار $f$ عند $x = 1$

3) ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x = 1$

✓ الحل

1) الدالة $x \mapsto 2e^{x-1} - 1$ معرفة على $\mathbb{R}$ بالتالي فهي معرفة على $]-\infty , 1]$

و الدالة $x \mapsto 2 - x$ معرفة على $\mathbb{R}$ فهي معرفة على $]1 , +\infty[$.

لذن الدالة $f$ معرفة على $]-\infty , 1] \cup ]1 , +\infty[$ اي معرفة على $\mathbb{R}$.

2) $f$ مستمرة عند 1 يعني ان $1 \in D_f$ و $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (2 - x) = 1 = f(1)$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(2e^{x-1} - 1\right) = 1 = f(1)$$

اذن $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ و عليه فإن $f$ مستمرة عند العدد 1 .

3) $f$ قابلة للاشتقاق عند 1 يعني أن $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell$

$$\lim_{x\underset{>}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\underset{>}{\to}1}\frac{2e^{x-1}-1-1}{x-1}=\lim_{x\underset{>}{\to}1}2\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{X\to0}2\frac{e^X-1}{X}=2=\ell_1$$

$$\lim_{x\underset{<}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\underset{<}{\to}1}\frac{2-x-1}{x-1}=\lim_{x\underset{<}{\to}1}\frac{1-x}{x-1}=-1=\ell_2$$

بما أن $\lim_{x\underset{>}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\underset{<}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ فإن $f$ غير قابلة للإشتقاق عند 1

## تطبيق 13 المستقيم المقارب المائل ـ التمثيل البياني

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}$ ، و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) عين نهاية $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) أ) بين أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=-x-1$ مقارب لـ $(\gamma)$ مائل بجوار $-\infty$

ب) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-x+3$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $+\infty$

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ثم ارسم $(\gamma)$

### ✓ الحل

1) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim\left(-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim\left(-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}4\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{1+e^{-x}}=4$ و $\lim_{x\to+\infty}(-x-1)=-\infty$

2) أ) $(d)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(-\infty)$ يعني $\lim_{x\to-\infty}f(x)-(-x-1)=0$

بما أن $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{1+e^x}=0$ فإن $(d)$ مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

ب) $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(+\infty)$ يعني $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=0$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=\lim_{x\to+\infty}\left[-4+\frac{4e^x}{1+e^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{1+e^x}=0$

فإن $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$





جـ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-\frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-1=0$

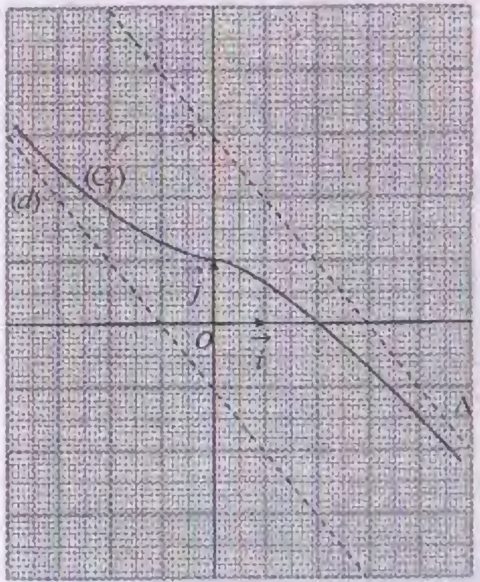
يكافئ $x=0$.

من أجل كل $x\neq0$

يكون $f'(x)<0$

إذن الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| تغيرات $f$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |




$f'(x)$ ينعدم عند $x=0$

و لا يغير إشارته

و منه النقطة $A(0,1)$

هي نقطة إنعطاف لـ $(C_f)$

## تطبيق 14 تعيين عبارة دالة ثم رسم تمثيلها البياني

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2e^x+ax+b$ ، $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس حيث $a$ و $b$ حقيقيان.

1) عين $a$ و $b$ بحيث المنحنى $(\gamma)$ يمر من النقطة $O(0,0)$ و معامل توجيه المماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة $O$ هو $-2$.

2) من أجل الدالة المحصل عليها سابقا.

أ) عين نهاية الدالة $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة $f$

جـ) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حلين أحدهما 0 و الآخر $\alpha$ حيث $1<\alpha<2$

د) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$.

هـ) بين أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=-4x-2$ مقارب مائل بجوار $(-\infty)$ ثم ادرس وضعية $(d)$ بالنسبة إلى $(\gamma)$ ثم ارسم $(\gamma)$ و $(d)$

### ✓ الحل

1) - $(\gamma)$ يمر من النقطة $O(0,0)$ يعني أن $f(0)=0$

$f(0)=0$ تكافئ $2+b=0$ تكافئ $b=-2$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2e^x+a$.

$f'(0)=-2$ تعني $2+a=-2$ و منه $a=-4$

إذن الدالة المطلوبة هي $f(x)=2e^x-4x-2$

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-4x-2\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^x}{x}-2-\frac{1}{x}\right) = +\infty$

ب) من السؤال (1) لدينا $f'(x) = 2e^x-4$

$f'(x)=0$ يكافئ $e^x=2$ يكافئ $x=Ln(2)$

لما $x > Ln2$ فإن $2e^x-4 > 0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $]Ln2\ ,\ +\infty[$

لما $x < Ln2$ فإن $2e^x-4 < 0$ و منه $f$ متناقصة تماما على $]-\infty\ ,\ Ln2[$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $Ln(2)$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $+\infty$ | ↘ | | ↘ | $f(Ln(2))$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

$f(Ln2)\approx -0,76$

جـ) بما ان $f(0)=0$ فإن $0$ حلا للمعادلة $f(x)=0$

- بما ان من اجل كل $x$ من $]Ln(2)\ ,+\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$

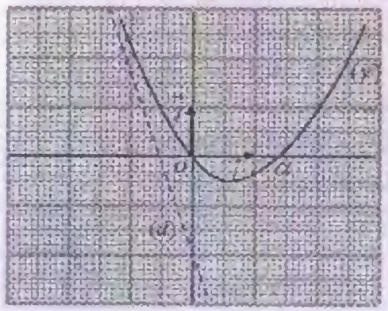
و $0\in]2-4Ln2\ ,+\infty[$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ من $]Ln2\ ,+\infty[$

و بما ان $f(1) < 0$ و $f(2) > 0$ فإن $1 < \alpha < 2$

د) - إذا كان $x\in]-\infty\ ,\ 0\ [\ \cup\ ]\ \alpha\ ,\ +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

- إذا كان $x\in]\ 0\ ,\ \alpha\ [$ فإن $f(x) < 0$

هـ) $(d)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(-\infty)$ يعني ان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-4x-2)=0$



بما ان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-4x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x=0$

فإن $(d)$ مستقيم مقارب لـ $(\gamma)$ بجوار $(-\infty)$

- لدراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$

نعين إشارة المقدار $f(x)-(-4x-2)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f(x)-(-4x-2)=2e^x$

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $2e^x > 0$

و منه $f(x)-(-4x-2) > 0$

اي ان المنحني $(\gamma)$ يقع فوق المستقيم $(d)$





## تطبيق 15 تعيين التمثيل البياني لدوال انطلاقا من بيان معطى

ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $x \longmapsto e^x$.
ثم استنتج التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية انطلاقا من $(\gamma)$
$g(x)=e^x-3$ ، $L(x)=\left|\ 3-e^x\ \right|$ ، $K(x)=2-e^x$

### ✓ الحل

أ) بما ان $g(x)=e^x-3=f(x)-3$ فإن بيان الدالة $g$ هو صورة $(C_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $-3\vec{j}$

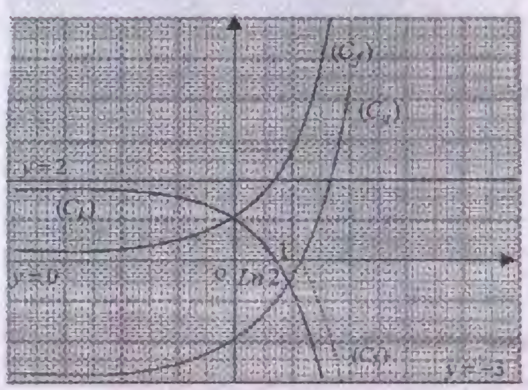
$(C_f)$ له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$

و $(C_g)$ له مستقيم مقارب معادلته $y=-3$ بجوار $-\infty$.

ب) $\begin{cases} L(x)=3-e^x\ , & x\le Ln3 \\ L(x)=e^x-3\ , & x\ge Ln3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} L(x)=-g(x)\ , & x\le Ln3 \\ L(x)=g(x)\ , & x\ge Ln3 \end{cases}$

- على المجال $[Ln3\ ,\ +\infty[$ بيان الدالة $L$ منطبق على $(C_g)$

- على المجال $]-\infty\ ,Ln3]$ بيان الدالة $L$ هو نظير $(C_g)$ بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=0$



جـ) $K(x)=2-e^x=2-f(x)$

و منه $\frac{K(x)+f(x)}{2}=1$

اي ان بيان الدالة $K$ هو نظير $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=1$

- $(C_K)$ يقطع $(xx')$ في النقطة ذات الفاصلة $Ln2$

و $(C_L)$ يقطع $(xx')$ في النقطة ذات الفاصلة $Ln3$

## تطبيق 16 دراسة تغيرات دالة و رسم تمثيلها البياني

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=e^{-x}+\frac{1-x}{1+x}$ و $(\gamma)$ التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.

1) ادرس نهاية الدالة $f$ عند أطراف المجالين $]-1\ ,\ +\infty[$ ؛ $]-\infty\ ,-1[$

2) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم ارسم $(\gamma)$

## ✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^{<}} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to -1^{<}} e^{-x}=e$ و $\lim\limits_{x\to -1^{<}}\frac{1-x}{1+x}=-\infty$

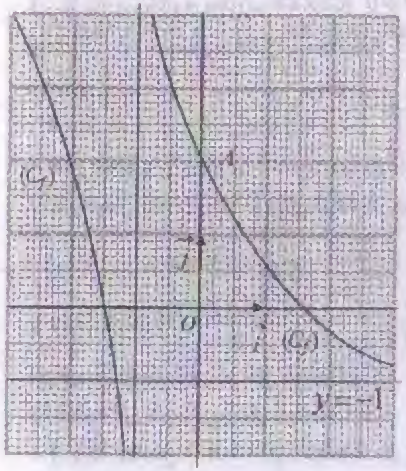
$\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to -1^{>}} e^{-x}=e$ و $\lim\limits_{x\to -1^{>}}\frac{1-x}{1+x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ و لدينا $f'(x)=-e^{-x}-\frac{2}{(1+x)^2}$

من اجل كل $x$ من $D_f$ يكون $f'(x)<0$

و منه $f$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$




| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $-$ | \|\| | $-$ |
| تغيرات $f$ | $+\infty \searrow -\infty$ | \|\| | $+\infty \searrow -1$ |

$y=-1$ مستقيم مقارب افقي بجوار $(+\infty)$

$(\gamma)$ يقطع $(yy')$ في النقطة $A(0,2)$

## تطبيق 17 — رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

$f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أدرس تغيرات الدالة $f$ ثم أرسم منحناها البياني.

2) $m$ عدد حقيقي:

أ) بين ان المعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد $\alpha$ على $\mathbb{R}$ .

ب) بين ان المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^x-1=0$

جـ) استنتج ان $\alpha=Ln\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)$





## ✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-e^{-x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}-e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

- الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)>0$ لأن $e^{-x}>0$ و $e^x>0$

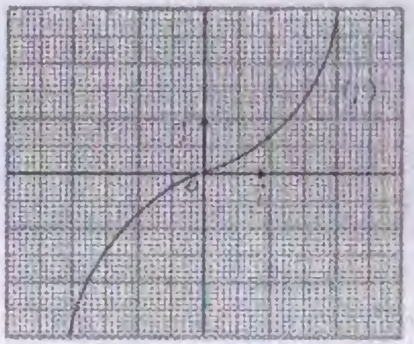
إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- $(\gamma)$ يقطع $(yy')$ في $O(0,0)$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $-\infty \nearrow$ | $+\infty$ |

2) أ) بما ان $f'(x)>0$ من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و $m\in]-\infty,+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ .

ب) $f(x)=m$ يكافئ $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=m$ يكافئ $e^{2x}-2me^x-1=0$




جـ) بوضع $e^x=X$ المعادلة $e^{2x}-2me^x-1=0$ تصبح $(1)$ ... $X^2-2mX-1=0$ و مميزها هو $\Delta=4m^2+4$

بما ان $\Delta>0$ فإن للمعادلة $(1)$ لها حلين هما

$$X_1 = m+\sqrt{m^2+1}$$

$$X_2 = m-\sqrt{m^2+1}$$

بما ان $m^2+1>m^2$ فإن $X_2<0$

و بالتالي فهو مرفوض.

إذن المعادلة $(1)$ لها حل وحيد $X_1=m+\sqrt{m^2+1}$ .

$X=X_1$ يكافئ $x=Ln(X_1)$ يكافئ $x=Ln\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)$

بما ان $x$ هو الحل الوحيد للمعادلة $e^{2x}-2me^x-1=0$ فإنه هو الحل الوحيد لـ $f(x)=m$ إذن $\alpha=Ln\left(m+\sqrt{1+m^2}\right)$

## تطبيق 18 — رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) أ) تحقق انه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن $f(x)$ يكتب على الشكل

$f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$ و $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$

ب) ادرس نهايات $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

جـ) بين أن المستقيمين $(d_1)$ و $(d_2)$ حيث $(d_1)$ : $y=x+1$ ، $(d_2)$ : $y=x-1$ ، مقاربان لـ $(\gamma)$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$ على التوالي

د) عين الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d_1)$ و $(d_2)$

2) أ) بين أن الدالة $f$ فردية.

ب) ادرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$

3) ارسم $(d_1)$ ، $(d_2)$ و $(\gamma)$ والمماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$

4) بين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محددا حصرا له بتقريب $0,1$

## الحل

1) أ) $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1}{e^x+1}+\frac{2}{e^x+1}=x-1+\frac{2}{e^x+1}$

$x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}=x+\frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x}=x+\frac{1-e^x}{1+e^x}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$

جـ) $(d_1)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma)$ في جوار $(-\infty)$ يعني ان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$

بما ان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{2e^x}{e^x+1}=0$ فإن $(d_1)$ مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

$(d_2)$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ في جوار $(+\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ فإن $(d_2)$ مقارب مائل بجوار $(+\infty)$

د) بما ان $f(x)-(x+1)=-\frac{2e^x}{e^x+1}<0$ فإن المنحني $(\gamma)$ يقع تحت المستقيم $(d_1)$

بما ان $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}>0$ فإن المنحني $(\gamma)$ يقع فوق المستقيم $(d_2)$

2) أ) $f$ فردية يعني أنه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و $f(-x)=-f(x)$ .

$f(-x)=-x-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x-\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=-x-\frac{1-e^x}{1+e^x}=-x+\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$

إذن $f$ دالة فردية.





ب) بما أن $f$ فردية فإننا نقتصر دراستها على المجموعة $D_f\cap\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

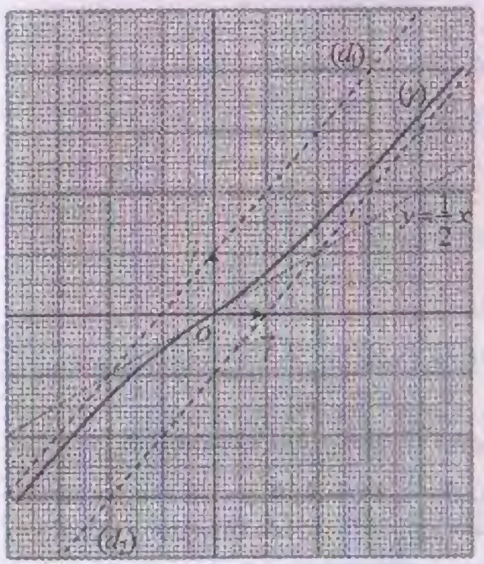
و لدينا $f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}>0$

و منه $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $+$ |
| تغيرات $f$ | $0 \nearrow +\infty$ |

3) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ هي $y=\frac{1}{2}x$

بما أن $f$ فردية نرسم بيانها على المجال $[0,+\infty[$ و نتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المركز $o$ .




4) بما أن $f'(x)>0$ من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و $1\in\mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x)=1$ لها حل وحيد $\alpha$ على $\mathbb{R}$

$f(1)-1=-\frac{e-1}{e+1}<0$

$f(2)-1=1-\frac{e^2-1}{e^2+1}>0$

$(f(2)-1)\times(f(1)-1)<0$

ومنه $\alpha$ تنتمي إلى المجال $]1,2[$

نستعمل طريقة المسح بخطوة قدرها $P=0,1$ فنحصل على الجدول المجاور

و منه $1,0<\alpha<1,1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | $-\frac{e-1}{e+1}$ |
| 1,1 | 0,6 |

## تطبيق 19 دراسة قابلية اشتقاق دالة و رسم التمثيل البياني

$f$ معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ من اجل $x>0$ و $f(0)=0$ ، $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) بين أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=1$ مقارب لـ $(\gamma)$

2) من اجل كل $x>0$ نضع $t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$

ادرس نهاية $t(x)$ عند الصفر. ثم استنتج أن $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر

3) أ) بين انه من اجل كل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

ب) ادرس تغيرات $f$ مشكلا جدول تغيراتها ثم ارسم $(d)$ و $(\gamma)$

## ✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$

إذن فالمستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ $(\gamma)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$ وبوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد

$$\lim_{x\to 0} t(x)=\lim_{X\to+\infty}-\left(-Xe^{-X}\right)+4\left(-\frac{1}{2}Xe^{-\frac{1}{2}X}\right)^2-27\left(-\frac{1}{3}Xe^{-\frac{1}{3}X}\right)^3=0$$

لأن $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-Xe^{-X}\right)=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{1}{2}Xe^{-\frac{1}{2}X}=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}Xe^{-\frac{1}{3}X}\right)=0$

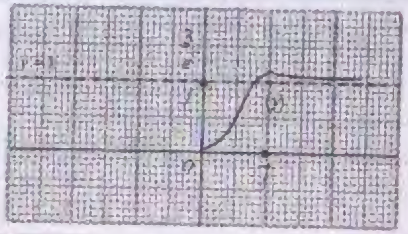
بما ان $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ فإن $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر والعدد المشتق هو $f'(0)=0$.

3) أ) $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل $x>0$ لدينا $f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-x)}{x^4}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0,1]$ و متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| تغيرات $f$ | $0$ ↗ | $\frac{e}{3}$ | ↘ $1$ |




## تطبيق 20 دراسة قابلية اشتقاق دالة ورسم التمثيل البياني

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) 1) عين نهاية $f$ على اطراف المجال $]0,+\infty[$.





2) أ) تحقق انه من اجل كل $x>0$ يكون $f(x)-x-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-1}}-1$

ب) استنتج نهاية $(f(x)-x-1)$ عند $(+\infty)$ و بين ان المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$. (تقبل ان من اجل $x>0$ يكون $(d)$ تحت $(\gamma)$)

3) ادرس تغيرات الدالة $f$ على $]0,+\infty[$ مشكلا جدول تغيراتها

II) 1) عين نهايات الدالة $f$ على اطراف المجال $]-\infty,0[$

2) بين ان المستقيم ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(-\infty)$

(تقبل ان من اجل كل $x<0$ فإن $(d)$ يقع فوق $(\gamma)$)

3) $g$ دالة معرفة على $]-\infty,0]$ بـ $\begin{cases} g(x)=f(x) & , x<0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

أ) حدد نهاية $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ لما $x$ يؤول الى $0$.

ب) استنتج ان $g$ قابلة للاشتقاق عند الصفر.

جـ) ادرس تغيرات $g$ على $]-\infty,0]$ مشكلا جدول تغيراتها ثم ارسم $(\gamma)$.

## ✓ الحل

I) 1) $\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0} f(x)=\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0} xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ ( مع $X=\frac{1}{x}$ )

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.

2) $f(x)-x-1=xe^{\frac{1}{x}}-x-1=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim\limits_{X\to 0}\left[\frac{e^X-1}{X}-1\right]=0$ مع $\left(X=\frac{1}{x}\right)$

إذن فالمستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(+\infty)$.

3) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن اجل $x>0$ لدينا $f'(x)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$

- إذا كان $x>1$ فإن $f'(x)>0$

ومنه $f$ متزايدة تماما على $]1,+\infty[$.

- إذا كان $0<x<1$ فإن $f'(x)<0$ منه $f$ متناقصة تماما على $]0,1[$.

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| تغيرات $f$ | $+\infty$ ↘ | $e$ | ↗ $+\infty$ |

I) 1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} x e^{\frac{1}{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)-x-1) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1\right] = \lim\limits_{X \to 0}\left[\dfrac{e^{X}-1}{X}-1\right] = 0$ مع $X = \frac{1}{x}$

إذن فالمستقيم ذو المعادلة $y = x+1$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(-\infty)$

•

3) أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$

ب) بما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

فإن $g$ قابلة للاشتقاق عند الصفر.

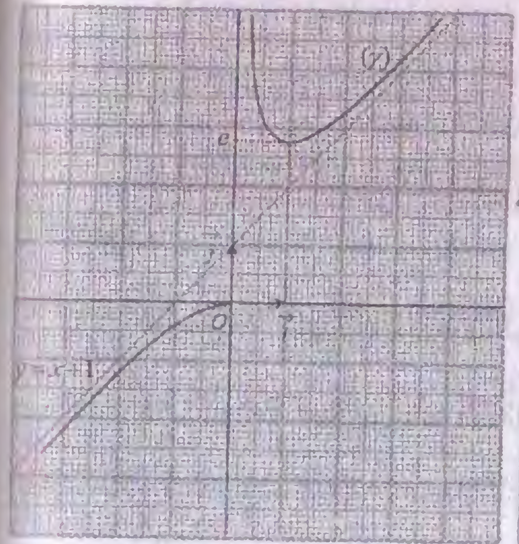
جـ) الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$

ومن أجل كل $x \langle 0$ لدينا $g'(x) = \dfrac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

من أجل $x \langle 0$ لدينا $g'(x) \rangle 0$

و منه $g$ متزايدة تماما على المجال:

$]-\infty, 0]$.




| $x$ | $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | + | |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ ↗ | $0$ |

## تطبيق 21 التمثيل البياني لدالة وحل معادلات

I) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x) = e^x + x + 1$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$

2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ يطلب إيجاد حصرا له

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.





1) بين أن $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج تغيرات $f$ على $\mathbb{R}$.

2) بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3) عين معادلة للماس $(d)$ لـ $(\gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة صفر ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(d)$ و $(\gamma)$

4) عين نهاية $f$ عند $(-\infty)$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

5) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ في جوار $(+\infty)$

6) ادرس وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ ثم ارسم $(d)$ و $(\Delta)$ و $(\gamma)$.

## ✓ الحل

I) 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $g'(x) = e^x + 1$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x) \rangle 0$

ومنه $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | + | |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

2) بما أن $g'(x) \rangle 0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$

فإن للمعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد $\alpha$ على $\mathbb{R}$.

بما أن $f(-1) = \frac{1}{e} \rangle 0$ و $f(-2) = \frac{1}{e^2} - 1 \langle 0$ فإن $-2 \langle \alpha \langle -1$

3) إذا كان $x \rangle \alpha$ فإن $g(x) \rangle 0$ و إذا كان $x \langle \alpha$ فإن $g(x) \langle 0$

II) 1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(1+e^x) - e^x x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x\left[(1+x)(1+e^x) - xe^x\right]}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} g(x)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \rangle 0$

و عليه إذا كان $x \rangle \alpha$ فإن $f'(x) \rangle 0$ و إذا كان $x \langle \alpha$ فإن $f'(x) \langle 0$

و إذا كان $x = \alpha$ فإن $f'(\alpha) = 0$

2) $g(\alpha) = 0$ يكافئ $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ يكافئ $e^\alpha = -\alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{1+e^\alpha} = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{1-\alpha-1} = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

بإضافة 1 إلى أطراف المتباينة $-2 \langle \alpha \langle -1$ نجد $-1 \langle 1+\alpha \langle 0$ إذن $-1 \langle f(\alpha) \langle 0$

3) معادلة المماس لـ $(\gamma)$ عند الصفر هي $(d) : y=\frac{1}{2}x$

- دراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{xe^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}x=\frac{xe^x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}xe^x}{1+e^x}=\frac{\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}x}{1+e^x}=\frac{\frac{1}{2}x\left(e^x-1\right)}{1+e^x}$$

إشارة $\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ من إشارة المقدار $\frac{1}{2}x\left(e^x-1\right)$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}x$ | - | 0 | + |
| $e^x-1$ | - | 0 | + |
| $f(x)-\frac{1}{2}x$ | + | 0 | + |

من الجدول المجاور نستنتج
أن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا:
$f(x)-\frac{1}{2}x \geq 0$
أي المنحني $(\gamma)$ يقع فوق المستقيم $(d)$
و يمسه في النقطة $o(0,0)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=1$

المنحني $(\gamma)$ له مستقيم مقارب افقي معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x-x-xe^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=0$

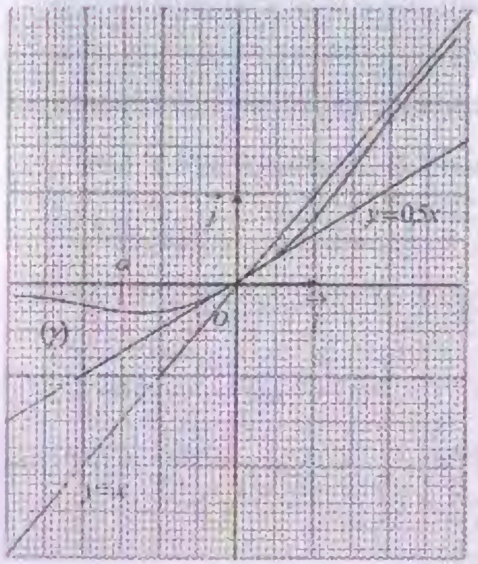
إذن فالمستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(+\infty)$

6) $f(x)-x=\frac{xe^x}{1+e^x}-x=\frac{xe^x-x-xe^x}{1+e^x}$

$=\frac{-x}{1+e^x}$

- إذا كان $x \rangle 0$ فإن $f(x)-x \langle 0$
ومنه $(\gamma)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$.
- إذا كان $x \langle 0$ فإن $f(x)-x \rangle 0$
ومنه $(\gamma)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$.
المستقيم $(\Delta)$ يقطع $(\gamma)$ في النقطة $o(0,0)$.

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | - | 0 | + |
| تغيرات $f$ | $0$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |








## تطبيق 22 الدوال و المحل الهندسي

في معلم متعامد و متجانس نعتبر المنحنيين $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ الممثلين للدالتين $x \to e^x$ و $x \to e^{-x}$.

نرفق بكل عدد حقيقي $m$ النقطة $A(m,o)$ و لتكن النقطتين $M$ و $N$ من المنحنيين $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ على الترتيب فاصلتهما $m$.

1) ارسم $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) $(T_1)$ و $(T_2)$ مماسان لـ $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ في النقطتين $M$ و $N$ على التوالي.
أوجد معادلة كل من $(T_1)$ و $(T_2)$ ثم بين أن $(T_1)$ و $(T_2)$ متعامدان.

3) المستقيمان $(T_1)$ و $(T_2)$ يتقاطعان في النقطة $p$. بين أن إحداثيتي $p$ هي
$x=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}$ و $y=\frac{2}{e^m+e^{-m}}$

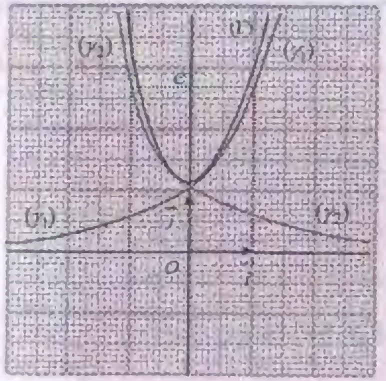
4) لتكن $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$
أ) أوجد بدلالة $m$ إحداثيي النقطة $I$.
ب) أوجد المحل الهندسي للنقطة $I$ لما $m$ يمسح $\mathbb{R}$.
جـ) أرسم مجموعة النقط $I$ في نفس المعلم السابق.

### ✓ الحل

1) $(\gamma_2)$ هو نظير $(\gamma_1)$ بالنسبة إلى محور التراتيب

2) $(T_1) : y=e^m(x-m)+e^m$
$(T_2) : y=-e^{-m}(x-m)+e^{-m}$
ميل $(T_1)$ × ميل $(T_2)$ $=\left(-e^{-m}\right)\times e^m=-1$
و منه $(T_1)$ و $(T_2)$ متعامدان

3) لدينا $e^m(x-m)+e^m=-e^{-m}(x-m)+e^{-m}$ و
منه $\left(e^m+e^{-m}\right)x=me^m-e^m+me^{-m}+e^{-m}$
إذن $x=\frac{me^m-e^m+me^{-m}+e^{-m}}{e^m+e^{-m}}=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}$
بالتعويض $x$ في عبارة $y$ نجد $y=\frac{2}{e^m+e^{-m}}$



4) $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = m$ و $y_I = \frac{e^m + e^{-m}}{2}$

إذن $I\left(m \,,\, \frac{e^m + e^{-m}}{2}\right)$

بوضع $m = x$ نجد $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

| $h$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| تغيرات $h$ | $+\infty \searrow$ | $1$ | $\nearrow +\infty$ |

إذن المحل الهندسي للنقطة $I$ هي المنحني الممثل للدالة $x \xrightarrow{h} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

## تطبيق 23 المشتقات المتتابعة والمتتاليات

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = (1-2x)e^{2x}$

$f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... ، $f^{(n)}$ هي مشتقات متتالية لـ $f$ حيث $n \geq 1$ .

1) عين $f^{(2)}$ و $f^{(3)}$

2) بين بالتراجع انه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، التمثيل البياني لـ $f^{(n)}$ يقبل مماسا افقيا في النقطة $M_n$ .

أ) عين $x_n$ و $y_n$ إحداثيتا النقطة $M_n$ و تحقق أن $M_n$ تنتمي إلى المنحنى $(\gamma)$ ذي المعادلة $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$

ب) بين ان المتتالية $(x_n)$ حسابية ، ما هي نهايتها ؟

جـ) بين ان المتتالية $(y_n)$ هندسية ثم ادرس نهايتها

### ✓ الحل

1) $f^{(1)}(x) = -2e^{2x} + 2e^{2x}(1-2x) = e^{2x}(-2+2-4x) = e^{2x}(-4x) = 2(-2x)e^{2x}$

$f^{(2)}(x) = \left(f^{(1)}\right)' = 2e^{2x}(-4x) - 4e^{2x} = e^{2x}(-4-8x) = 2^2(-1-2x)e^{2x}$

$f^{(3)}(x) = \left(f^{(2)}\right)' = 2e^{2x}(-4-8x) + (-8)e^{2x} = e^{x}(-16-16x) = 2^3(-2-2x)e^{2x}$

2) نسمي $P_n$ الخاصية " $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ "

$P_1$ صحيحة لأن $f^{(1)}(x) = 2^1(1-1-2x)e^{2x}$





نفرض أن $P_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n$

و نبرهن أن $P_{n+1}$ صحيحة أي $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left[-2e^{2x} + 2e^{2x}(1-n-2x)\right]2^n = e^{2x}(-2+2-2n-4x) \times 2^n$$
$$= 2^{n+1}\, e^{2x}(-n-2x) = 2^{n+1}\, e^{2x}\left(1-(n+1)-2x\right)$$

إذن $P_{n+1}$ صحيحة ومنه $P_n$ صحيحة من أجل كل $n \geq 1$

3) أ) $f^{(n+1)}(x) = 0$ يكافئ $-n-2x = 0$ يكافئ $x = \frac{-n}{2}$

إذن $x_n = x = \frac{-n}{2}$

$y_n = f^{(n)}(x_n) = 2^n(1-n+n)e^{-n} = 2^n \times e^{-n}$

إذن $x_n = \frac{-n}{2}$ و $y_n = 2^n \times e^{-n}$

بوضع $x_n = x$ و $y_n = y$ نجد $n = -2x$ و $y = 2^{-2x} e^{2x} = \frac{e^{2x}}{4^x}$

إذن $M_n$ تنتمي إلى المنحني ذي المعادلة $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$

ب) بما أن $x_{n+1} - x_n = -\frac{(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{-1}{2}$

فإن $(x_n)$ متتالية حسابية اساسها $-\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$

جـ) بما أن $y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n$ فإن $(y_n)$ متتالية هندسية اساسها $r' = \frac{2}{e}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$

## تطبيق 24 حساب نهاية متتالية باستعمال الدوال

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نعرف على $I = [0,1]$ الدالة $f$ بـ $f(x) = e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right]$

1) أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل $x$ من $I$ يكون $0 \leq f'(x) \leq 1$

2) استنتج أن $f(1) \geq f(0)$

3) باستعمال تغيرات $g$ المعرفة على $I$ بـ $g(x) = f(x) - \frac{x}{n!}$

بين أن $f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$

4) استنتج أن $e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq e$

5) بين أن $0 \leq e - V_n \leq \frac{3}{n!}$ حيث $V_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ .

6) عين نهاية المتتالية $(V_n)$.

7) عين $n_0$ بحيث من اجل $n \geq n_0$ يكون $e - V_n \leq 10^{-4}$

استعمل للتباينة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

✓ الحل

1) $f'(x) = e^{-x}\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}\right]+\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{x!}+....\frac{+x^{n-1}}{(n-1)!}\right](-e^{-x}) = e^{-x}\left[\frac{x^n}{n!}\right]$

$1 \geq e^{-x} \geq \frac{1}{e}$ .... (1) ، $1 \geq x^4 \geq 0$ ... (2)

بالضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد $1 \geq e^{-x} x^n \geq 0$ .

$1 \geq \frac{1}{n!} \rangle\ 0$ ... (3) ، $1 \geq e^{-x} x^n \geq 0$ .... (4)

بالضرب حدود المتباينتين (3) و (4) طرفا لطرف نجد $1 \geq \frac{e^{-x} x^n}{n!} \geq 0$ اي $1 \geq f'(x) \geq 0$

2) بما ان $f'(x)$ موجب على $I$ فان $f$ متزايدة تماما على $I$ و عليه $f(0) \langle f(1)$

3) لدينا $g'(x) = \frac{1}{n!}\left(e^{-x} x^n - 1\right)$

بما ان $0 \leq e^{-x} x^n \leq 1$ فان $-1 \leq e^{-x} x^n - 1 \leq 0$ و بالتالي $g'(x) \langle 0$

إذن $g$ متناقصة تماما على $I$ و عليه $g(0) \rangle g(1)$ .

$g(0) \rangle g(1)$ تعني $f(1) - \frac{1}{n!} \leq f(0)$ اي $f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$ .

4) $f(0) \leq f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$ و منه نجد $-1 \leq -e^{-1}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right) \leq -1+\frac{1}{n!}$

بضرب حدود هذه للتباينة في $-e$ نجد $e \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} \geq e\left(1-\frac{1}{n!}\right)$

5) $V_n = 1+\frac{1}{n!}+...+\frac{1}{n!}$

بما ان $V_n \leq e$ فان $e - V_n \geq 0$ .

لدينا من السؤال الرابع المتباينة $V_n \geq e\left(1-\frac{1}{n!}\right)$ بضرب طرفيها في $-1$ نجد :

$-V_n \leq e\left(-1+\frac{1}{n!}\right)$ و بإضافة $e$ إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $e - V_n \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!}$

إذن $\frac{3}{n!} \geq e - V_n \geq 0$

6) بما ان $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n!} = 0$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{n \to +\infty} (e - V_n) = 0$

إذن $\lim_{n \to +\infty} V_n = e$





7) حتى يكون $e - V_n \leq 10^{-4}$ يجب ان يكون $\frac{3}{n!} \leq 10^{-4}$

بما ان $\frac{3}{n!} \leq \frac{3}{2^{n-1}}$ فإن $\frac{3}{2^{n-1}} \leq 10^{-4}$ حيث $2^{n-1} \geq 3\times 10^{+4}$

ومنه ينتج $(n-1)\,Ln\,2 \geq Ln\left(3\times 10^4\right)$

إذن $n \geq \frac{Ln\left(3\times 10^4\right)}{Ln\,2}+1$ اي $n \geq 15,80$

و بالتالي قيمة $n_0$ هي $n_0 = 16$ .

## تطبيق 25 حل معادلات تفاضلية

لتكن المعادلة التفاضلية $(E)$ ... $y' = y(1-y)$ . نريد إيجاد حلول $(E)$ التي لا تنعدم على $\mathbb{R}$ لذلك نضع $z = \frac{1}{y}$

1) تحقق أن $z' = -z+1$ .... $(E')$

2) بين أن حلول $(E')$ هي الدوال $x \xrightarrow{f} 1+c\,e^{-x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$ .

3) استنتج حلول المعادلة $(E)$ .

✓ الحل

1) $z' = \frac{-y'}{y} = -\frac{y(1-y)}{y^2} = \frac{y-1}{y} = 1-\frac{1}{y} = 1-z$

2) $f$ حلا للمعادلة $(E')$ يعني أن $f'(x) = -f(x)+1$ .

$f'(x) = -c\,e^{-x}+1-1 = -\left(1+c\,e^{-x}\right)+1 = -f(x)+1$

إذن $x \to 1+c\,e^{-x}$ حلا للمعادلة $(E')$ .

3) $z = \frac{1}{y}$ منه $y = \frac{1}{z}$ إذن $y = \frac{1}{1+c\,e^{-x}}$

## تطبيق 26 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' + a\,y = f(x)$

لتكن $(E)$ معادلة تفاضلية بحيث $y'+4\,y = 3\,x\,e^{2x}$ و لتكن $(E')$ معادلة تفاضلية $y'+4\,y = 0$ .

1) حل المعادلة $(E')$

2) عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ .

بـ $g(x) = (ax+b)\,e^{2x}$ حلا خاص للمعادلة $(E)$ .

✓ الحل

1) $y'+4y=0$ يكافئ $y'=-4y$ و حلها العام هو $y=\lambda e^{-4x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2) $g$ حلا للمعادلة $(E)$ هذا معناه أن (1) ... $g'(x)+4g(x)=3xe^{2x}$

$$g'(x) = ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(2ax+a+2b)$$

$$g'(x)+4g(x) = e^{2x}(2ax+a+2b+4ax+4b) = e^{2x}(3ax+a+3b) \quad ... (2)$$

من (1) و (2) نجد $a+6b=0$ و $6a=3$ و منه ينتج $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{12}$ .

إذن $g(x) = \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x}$ .

## تطبيق 27 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'+y=f(x)$

1) نريد حل المعادلة التفاضلية $(E)$ ... $y'+y=x+1$ حيث $y$ دالة عددية ذات المتغير $x$ و $y'$ مشتقتها

ا) نضع $z=y-x$ أكتب المعادلة التفاضلية $(E)$ بدلالة $z$ و لتكن $(F)$.

ب) حل المعادلة $(F)$ ثم $(E)$.

2) نسمي $f_\alpha$ حل للمعادلة $(E)$ بحيث $f_\alpha(0)=\alpha$ و $(\gamma_\alpha)$ التمثيل البياني للدالة $f_\alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي معطى.

ا) ادرس تغيرات $f_\alpha$ في كل حالة من الحالات $\alpha > 0$ ، $\alpha=0$ ، $\alpha < 0$ .

ب) بين انه من اجل كل $\alpha$ ، المماس لـ $(\gamma_\alpha)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-1$ يمر من النقطة $o(0,0)$ .

جـ) بين ان كل المماسات للمنحنيات $(\gamma_\alpha)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ تقطع $(\gamma_0)$ في نقطة وحيدة يطلب تعيينها مع $\alpha \neq 0$ .

✓ الحل

1) ا) $z'=y'-1$ و منه $y'=z'+1$

إذن $(E)$ تكتب $z'+1+z+x = x+1$ أي $z'+z=0$ و منه $z'+z=0$ ، $(F)$

ب) الحل العام للمعادلة $(F)$ هو $z=\lambda e^{-x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ .

و بالتالي الحل العام للمعادلة $(E)$ هو $y=\lambda e^{-x}+x$

2) $f_\alpha(0)=\alpha$ يكافئ $\lambda e^{0}+0=\alpha$ أي $\lambda=\alpha$

إذن $f_\alpha(x)=\alpha e^{-x}+x$

ا) $f'_\alpha(x)=-\alpha e^{-x}+1=\frac{-\alpha}{e^{x}}+1=\frac{-\alpha+e^{x}}{e^{x}}$





- في حالة $\alpha > 0$ لدينا $f'_\alpha(x)=0$ يكافئ $\alpha=e^{x}$ يكافئ $x=Ln(\alpha)$

اذا كان $x > Ln(\alpha)$ فإن $f'_\alpha(x) > 0$ وإذا كان $x < Ln(\alpha)$ فإن $f'_\alpha(x) < 0$

- في حالة $\alpha < 0$ يكون $f'_\alpha(x) > 0$ منه $f_\alpha$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'_\alpha(x)$ | | + | |
| تغيرات $f_\alpha$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

حالة $\alpha < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $Ln\,\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'_\alpha(x)$ | | - | 0 | + | |
| تغيرات $f_\alpha$ | $+\infty$ | ↘ | $1+Ln\,\alpha$ | ↗ | $+\infty$ |

حالة $\alpha > 0$

في حالة $\alpha=0$ يكون $f'_\alpha(x)=1$ و منه $f_\alpha(x)=x$

$(\gamma_0)$ في هذه الحالة هو مستقيم معادلته $y=x$

ب) المماس لـ $(\gamma_\alpha)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-1$ هو $y=(-\alpha e+1)x$

ومنه هذا المماس يمر من المبدأ $o(0,0)$ .

جـ) المماسات لـ $(\gamma_\alpha)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ معادلتها هي

$$y=\left(\frac{-\alpha+e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x-x_0)+\alpha e^{-x_0}+x_0$$

المماسات تقطع $(\gamma_0)$ في نقطة وحيدة هذا معناه المعادلة

$$x=\left(\frac{-\alpha+e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x-x_0)+\alpha e^{-x_0}+x_0 \quad ...(*)$$

لها حل وحيد.

من $(*)$ نجد $x=x_0+1$ و منه $y=x=x_0+1$

إذن كل المماسات لـ $(\gamma_\alpha)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ تقطع $(\gamma_0)$ في نقطة وحيدة $M_0(x_0+1\ ,\ x_0+1)$ مستقلة عن $\alpha$ .

## تطبيق 28 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y''+\omega y'=0$

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E)$... $f''+4f'=0$

1) بوضع $g=f'$ بين ان $g$ حلا للمعادلة $(E')$... $g'+4g=0$ ثم حل $(E')$.

2) استنتج ان حلول $(E)$ هي الدوال $x \xrightarrow{f} -\frac{a}{4}e^{-4x}+b$ مع $a$ و $b$ عددان حقيقيان كيفيان.

3) من بين الحلول $f$ عين الحل الذي يحقق $f(0)=0$ و $f\left(-\frac{1}{4}\right)=2$

✓ الحل

1) بما أن $g = f'$ فإن $g' = f''$ ؛ بتعويض $f'$ و $f''$ في $(E)$ نجد $g' + 4g = 0$
اي $g$ حلا لـ $(E')$ .
الحل العام للمعادلة $(E')$ هو $g(x) = a\,e^{-4x}$ حيث $a$ عدد حقيقي.

2) حتى تكون $f$ حلا للمعادلة $(E)$ يجب أن يكون $f'(x) = g(x)$
$$f'(x) = (-4)\left(-\frac{a}{4}\right)e^{-4x} = a\,e^{-4x} = g(x)$$
إذن حلول المعادلة $(E)$ هي الدوال $f$ المعرفة بـ $f(x) = -\frac{a}{4}e^{-4x} + b$

3) $f(0) = 0$ يكافئ $-\frac{a}{4} + b = 0$ ومنه $b = \frac{a}{4}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2$ يكافئ $-\frac{a}{4}e + b = 2$ ......... (1)

بتعويض قيمة $b$ في (1) نجد $\frac{-a}{4}e + \frac{a}{4} = 2$ اي $\frac{-a}{4}(e-1) = 2$

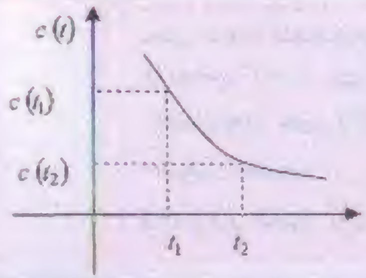
و منه $a = \frac{8}{-(e-1)}$ و $b = \frac{2}{1-e}$ إذن الدالة المطلوبة هي $x \mapsto \frac{-2}{1-e}e^{-4x} + \frac{2}{1-e}$

## تطبيق 29 التناقص الأسي لتركيز الدواء في الدم

ليكن $C(t)$ التركيز بـ $(mg/\ell)$ لدواء في الدم بدلالة الزمن $(t \rangle 0)$ حيث $t$ معبر عنه بالساعات. سرعة تخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة ، ثابت التخلص يساوي $0,25$ ؛ التركيز الابتدائي هو $5\,mg/\ell$ .

1) برر المساواة $C'(t) = -0,25\,C(t)$ ثم أوجد عبارة $C(t)$
2) ادرس تغيرات $C$ واحسب نهاية $C(t)$ عند $(+\infty)$ ثم ارسم بيان الدالة $C$ .
3) أعط حصرا بتقريب $0,01$ للحظة $t_0$ التي ابتداء منها يكون $C(t) \langle 2$

✓ الحل

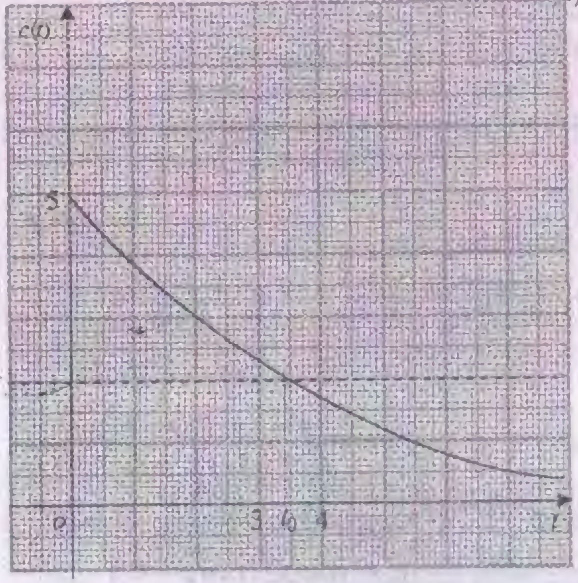



1) $\lim\limits_{t_1 \to t_2} \frac{C(t_2) - C(t_1)}{t_2 - t_1} = V_E(t_2)$
$V_E(t_2)$ هي سرعة التخلص الدم من الدواء في اللحظة $t_2$ .
سرعة التخلص $V_E$ هي مشتقة التركيز $C(t)$
اي $C'(t) = V_E$





ان ثابت تخلص الجسم من الدواء هو معامل التناسب بين سرعة التخلص و التركيز في لحظة $t$
و بما ان التركيز يتناقص فإن العامل يكون سالب اي $(-0,25)$
وعليه $C'(t) = -0,25\,C(t) \ldots (E)$
و الحل العام للمعادلة $(E)$
هو $C(t) = \alpha \times e^{-0,25t}$
حيث $\alpha$ عدد حقيقي.
لما $t = 0$ فإن $C(0) = 5$
ومنه $\alpha \times e^{0} = 5$ اي $\alpha = 5$
إذن $C(t) = 5\,e^{-0,25t}$




2) بما ان $C'(t) = -1,25\,e^{-0,25t}$
فإن $C'(t) \langle 0$ و بالتالي الدالة $C$ متناقصة تماما على $[0, +\infty[$ .
و اليك جدول تغيرات $C$

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $C'(t)$ | $-$ | |
| $C(t)$ | $5$ ↘ | $0$ |

3) نضع $g(t) = C(t) - 2$ و من المتباينة $C(t) \langle 2$ نجد $t \geq 3,66$ .
بما ان $g'(t) \langle 0$ و $0 \in ]-2 \,,\, 3[$ فإن المعادلة $g(t) = 0$ لها حل وحيد $t_0$ حيث $t_0 \rangle 3,66$ باستعمال طريقة المسح بخطوة قدرها $0,01$
نحصل على الجدول التالي.
إذن $3,66 \langle t_0 \langle 3,67$

| $t$ | $g(t)$ |
|---|---|
| 3,66 | 0,00258 |
| 3,67 | -0,0024 |

## تطبيق 30 استعمال التناقص الأسي في دراسة تغير وسط بكتيري

يقوم عالم مختص في البكتيريا بملاحظة نمو مجتمع بكتيري في وسط مغلق ، يقدر العدد الابتدائي لهذا المجتمع بـ 100 بكتيريا والقدرة الاستيعابية العظمى هي 1000 بكتيريا.
لتكن $N(t)$ عدد البكتيريا في اللحظة $t$ (معبر عنها بالساعات).
الملاحظات المستخلصة قادتنا إلى نمذجة هذه الحالة بمعادلة تفاضلية
$N'(t) = 0{,}07\,N(t)\left(1 - 10^{-3}N(t)\right)$

نضع $P(t)=\frac{1}{N(t)}$ مع $N(t)\neq 0$

1) بين أن الدالة $P$ تحقق المعادلة التفاضلية $P'=-0,07\,P+7\times10^{-5}$

2) استنتج عبارة $P(t)$ ثم $N(t)$ بدلالة $t$ .

3) ما هو عدد البكتريا بعد 40 ساعة ؟

4) ما هو الوقت اللازم حتى يصبح عدد البكتريا يمثل 80 % من الاستيعابية العظمى لهذا الوسط ؟

### ✓ الحل

1) $$P' = \frac{-N'(t)}{N^2(t)} = \frac{-0,07\,N(t)\left(1-10^{-3}\times N(t)\right)}{N^2(t)} = \frac{-0,07\left(1-10^{-3}N(t)\right)}{N(t)}$$

$$P' = -\frac{0,07}{N(t)}+0,07\times10^{-3}$$

$$P' = -0,07\,P+7\times10^{-5}$$

2) $P(t)=10^{-3}+c\,e^{-0,07t}$

و بما أن $P(0)=\frac{1}{100}$ فإن $10^{-3}+c=\frac{1}{100}$ وبالتالي $c=9\times10^{-3}$

إذن $P(t)=10^{-3}\left(1+9e^{-0,07t}\right)$ و $N(t)=\frac{1000}{1+9\times e^{-0,07t}}$

3) بما أن $N(40)=647$ فإن بعد 40 ساعة عدد البكتريا يصبح 647 .

4) 80 % من البكتريا يعادل 800 بكتيريا

$N(t)=800$ يكافئ $t=51,19$

إذن عدد الساعات هي تقريبا 51 ساعة.

## تطبيق 31 تحول الآزوت بالهواء الجوي إلى الكربون المشع

يحتوي الغلاف الجوي على مادة الآزوت و التي بفعل الإشعاعات الكونية تتحول إلى مادة الكربون المشع $(C^{14})$ ، و تحتوي الكائنات الحية على هذه المادة التي تتجدد على الدوام و عند موتها فإن مادة الكربون 14 تتحلل تدريجيا (تتناقص في الوسط).

لمعرفة زمن وفاة كائن نقوم بقياس نسبة الكربون 14 المتبقية في جسمه.

لتكن $N(t)$ عدد ذرات $C^{14}$ المتواجدة في اللحظة $t$ المعبر عنها بالأعوام في عينة من مادة عضوية.

بين الفيزيائيون أن الدالة $N$ تحقق المعادلة $N'(t)=-k\times N(t)$ من أجل





كل عدد حقيقي موجب $t$ حيث $k=1,245\times10^{-4}$ و $N(0)=N_0$ .

نقول أن سرعة تحلل $C^{14}$ متناسبة مع عدد ذرات $C^{14}$ المتواجدة في تلك اللحظة

1) أوجد $N(t)$ بدلالة $N_0$ و $t$

2) ما هي نسبة ذرات الكربون $C^{14}$ المفقودة خلال 10000 سنة ؟

3) نسمي نصف حياة الكربون $C^{14}$ الزمن المطلوب لاستحالة نصف عدد ذرات $C^{14}$

أ) برر العلاقة $N(t+T)=\frac{1}{2}N(t)$ حيث $T$ هو نصف حياة $C^{14}$ .

ب) استنتج أن $T=\frac{Ln(2)}{k}$ معينا قيمة تقريبية له

4) قام علماء الآثار بتحليل شظايا لعظام وجدت في كهف ، فوجدوا نسبة الكربون $C^{14}$ الموجودة في هذه العظام تمثل 20 % من نسبة الكربون $C^{14}$ الموجودة في عينة عظام جديدة لها نفس الكتلة أوجد عمر شظايا العظام.

### ✓ الحل

1) الحل العام للمعادلة $N'(t)=-k\times N(t)$ هو $N(t)=\lambda\,e^{-kt}$

بما أن $N(0)=N_0$ فإن $\lambda\,e^{0}=N_0$ ومنه $\lambda=N_0$ إذن $N=N_0\,e^{-kt}$

2) كمية الكربون في اللحظة $t=10000$ سنة هي $N_1=N_0\,e^{-k\times10000}$

نسبة الكربون $C^{14}$ المفقودة خلال 10000 سنة هي $\frac{N_1-N_0}{N_0}$ .

$$\frac{N_1-N_0}{N_0}=\frac{N_0\,e^{-k\times10000}-N_0}{N_0}=e^{-k\times10000}-1=-0,712$$

إذن نسبة الكربون المفقودة خلال 10000 سنة هي 7,12 %.

3) أ) $N(t+T)=N_0\,e^{-k(t+T)}=N_0\,e^{-kt}\times e^{-kT}=N(t)\times e^{-kT}$

بما أن $N(T)=\frac{1}{2}N_0$ فإن $N_0\,e^{-kT}=\frac{1}{2}N_0$ أي $e^{-kT}=\frac{1}{2}$

إذن $N(t+T)=N(t)\times\frac{1}{2}$ .... (*)

ب) بوضع $t=0$ العلاقة (*) تصبح $N_0\,e^{-kT}=N_0\times\frac{1}{2}$ ومنه نستنتج أن $e^{-kT}=\frac{1}{2}$

من المساواة $e^{-kT}=\frac{1}{2}$ نجد $T=\frac{Ln(2)}{k}$ بتعويض قيمة $k$ نجد $T\approx5567,45$

أي تقريبا 5568 سنة .

4) لدينا $\frac{N(t)}{N_0}=20\,\%$ و منه $N(t)=N_0\times0,20$ .

$N_0\,e^{-kt}=N_0\times0,2$ تكافئ $e^{-kt}=0,2$ يكافئ $-kt=Ln(0,2)$

و منه نجد $t=\frac{Ln(0,2)}{-k}$ و بالحساب نجد $t\approx12927$ .

# تمارين و مسائل

**1-**

حل المعادلات التالية :

1) $e^{x-3}=1$ ، 2) $e^{4x^2+6}=e^{14x}$ ، 3) $e^{x}-e^{-2x}=0$

4) $(e^{-2x}-e)(e^{6x}+5)=0$ ، 5) $Ln(e^x-4)=5$ ، 6) $\frac{e^{2x}+2e^x-4}{3e^x-2}=1$

7) $e^x-2e^{-\frac{x}{2}}-5=0$ ، 8) $e^{2x}=2e^{-x}$ ، 9) $e^{4x}-3e^{2x}+2=0$ ،

10) $e^{-x}+e^x+2=0$ ، 11) $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+3}$

**2-**

1) عين جذور كثير الحدود $P(x)$ حيث $P(x)=2x^2+9x-5$ مستنتجا تحليلا له.

2) ادرس إشارة كل من $(e^x+5)$ و $(2e^x-1)$

3) باستعمال الأسئلة السابقة حل المتراجحة $2e^{2x}+9e^x-5>0$.

**3-**

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $2-e^x\geq 0$ ، 2) $e^{2x^2-1}\geq 3$ ، 3) $(e^x)^2\leq 4$

4) $e^x-2e^{-x}<0$ ، 5) $(e^x-1)e^x\geq 2(e^x-1)$ ، 6) $3e^{2x}+e^x-4<0$

7) $\frac{e^x-4}{e^x+4}\leq\frac{e^x-3}{e^{2x}+3}$ ، 8) $e^{x+1}>2^x$ ، 9) $e^{|x-1|}\geq 1$ ، 10) $2^{2x}+2^{x+1}-3>0$

11) $2^{x+2}-10\times 2^{x+1}+12=0$ ، 12) $3^x+2\times 3^{-x-1}=7$ ، 13) $4^x+2^{x+1}-3\leq 0$

**4-**

حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية :

أ) $\begin{cases} xy=14 \\ e^x e^y=e \end{cases}$ ، ب) $\begin{cases} e^{x+y}+e^{xy}=2e^4 \\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{2} \end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases} e^x-\frac{1}{e}e^y=1 \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$

**5-**

أحسب نهايات الدالة $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :





1) $f(x)=x+3+xe^x$ ، ب) $f(x)=x+2+\frac{5}{e^x+1}$ ، جـ) $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+2}$

د) $f(x)=\frac{5x-2}{e^x+2}$ ، هـ) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$ ، و) $f(x)=\frac{3x+1}{x}e^x$

**6-**

أدرس نهاية الدالة $f$ في المكان المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{e^x-2}{3x}$ عند $0$ ، ب) $f(x)=5x\,e^{-x}$ عند $+\infty$.

جـ) $f(x)=\frac{3e^x-3}{3x-3}$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ، د) $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$ عند $(+\infty)$

هـ) $f(x)=e^{2x}-e^x+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

و) $f(x)=\frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ عند $0$ و $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ي) $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x+3\sqrt{x}}$ عند $0$ ، ف) $f(x)=\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4x^2}$ عند $0$.

**7-**

$f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=20x-600-e^{-0,5x+1}$

1) عين نهاية $f$ عند $(+\infty)$.

2) بين أن للمستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=20x-600$ مقارب مائل لمنحني الدالة $f$ و ليكن $(\gamma)$

3) أدرس الوضعية النسبية لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$

**8-**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-1-2e^x$

I- 1) أدرس نهاية $f$ عند $(-\infty)$

ب) بين ان المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\gamma)$ الممثل $f$.

2) أدرس الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$.

3) بين أنه نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=e^x\left(\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}-2\right)$

ثم استنتج نهاية $f$ عند $(+\infty)$.

**9-**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ln(e^x+2)$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم.

1) أدرس نهاية $f$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) بين انه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $f(x)=x+Ln\left(1+2e^{-x}\right)$ ثم استنتج ان $(\gamma)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(d)$ في جوار $(+\infty)$.
3) ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$ .

**10**

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال المعطاة مع تعيين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

1) $f(x)=x^3 e^x$    2) $f(x)=\dfrac{e^x}{x-2}$

3) $f(x)=2+\dfrac{e^x}{e^x-1}$    4) $f(x)=(3x+5)e^x$

5) $f(x)=(\sin x)e^x$    6) $f(x)=(-3x^2+2x)e^{-x}$

7) $\left(f(x)=e^{-x}-\sqrt{x}+2\right)$    8) $f(x)=e^{x^2+3x+2}$

9) $f(x)=\dfrac{e^{3x+1}}{x+3}$    10) $f(x)=\dfrac{3x+1}{e^{x+2}}$

11) $f(x)=(\cos x)e^{\frac{1}{x}}$    12) $f(x)=(x-1)e^{x^2}$

**11**

عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة $f$ و المجموعة التي تكون فيها $f$ قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

1) $f(x)=e^{\cos x}$ ، 2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}+1}$ ، 3) $f(x)=e^{x+|x|}$

4) $f(x)=e^{x+\sin x}$ ، 5) $f(x)=Ln\left(e^x+|x|\right)$ ، 6) $f(x)=\dfrac{e^{-|x|}-2}{e^x}$

**12**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2-x)\,e^x$ ما مصداقية المعلومات التالية ؟
1) جدول تغيرات $f$ هو :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| تغيرات $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2) من اجل كل عدد حقيقي $m \rangle 0$ و $m \neq e$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلان او و لا حل
3) المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني الممثل لـ $f$ .



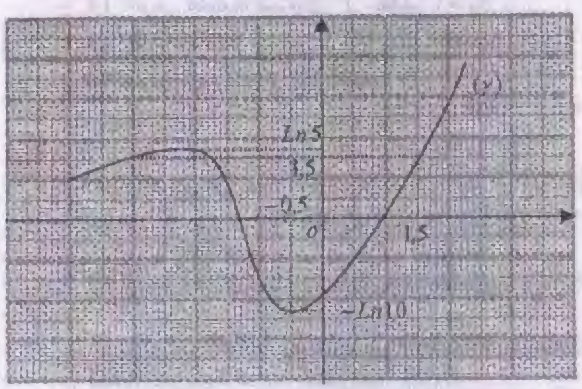


**13**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ و ليكن $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس ، $A$ نقطة إحداثيها $\left(Ln(2), Ln(2)\right)$
1) اوجد $a$ و $b$ بحيث $(\gamma)$ يمر من $A$ و يقبل عندها مماسا موازيا لمحور الفواصل.
2-أ) ادرس تغيرات الدالة المحصل عليها في السؤال 1) .
ب) ارسم $(\gamma)$ و للماس عند $A$ .

**14**

$f$ دالة معرفة على $]-4,+\infty[$ و منحناها البياني $(\gamma)$ في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ كما في الشكل




1) شكل جدول تغيرات $f$ .
2) أ) عين تغيرات الدالة $g$ المعرفة بـ $g(x)=e^{f(x)}$
ب) عين صور الأعداد $-4$ ، $-2$ ، $-1$ ، $-\frac{1}{2}$ ، $0$ ، $1$ بالدالة $g$
جـ) ما هي نهاية $g$ عند $(+\infty)$ ؟
3) ارسم المنحنى البياني للدالة $g$ في المعلم السابق
4) حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$ ثم المتراجحة $f(x)\geq\frac{3}{2}$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $g(x)=1$ و حلول المتراجحة $g(x)\geq e\sqrt{e}$ .

**15**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2e^x-x-2$
1) عين نهاية $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ثم شكل جدول تغيرات $f$ .
2) استنتج من السؤال (1) ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان $\alpha$ و $\beta$ بحيث $-1,5 \geq \alpha \geq -1,6$
3) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ .

**16**

ادرس تغيرات الدوال التالية ،

1) $f(x)=xe^x-2$    2) $f(x)=x-2+e^x$    3) $f(x)=\dfrac{e^x-3}{e^x+3}$

4) $f(x)=\frac{x-3}{e^x}$  5) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$  6) $f(x)=x-2+e^{-x}$

7) $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+2}$  8) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**17**

$f$ دالة معرفة كما يلي $\begin{cases} f(x)=2e^{x-1}-1 & , \quad x\leq 1 \\ f(x)=1+Ln\,x & , \quad x>1 \end{cases}$

$(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) هل $f$ مستمرة عند $x_0=1$ ؟

2) ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x_0=1$ .

3) عين معادلة المماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة $A(1,1)$

4) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم $(\gamma)$ .

**18**

$f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=(2-x)\,e^x-1$ و $(\gamma)$ منحناها البياني.

1) ادرس تغيرات $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

2) ارسم $(\gamma)$ في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

3) بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ بحيث $1\leq\alpha\leq 2$ ثم عين قيمة تقريبية لـ $\alpha$ بتقريب $0,01$

4) ادرس إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ .

**19**

$g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x\,e^x-1$

1-1) ادرس تغيرات $g$ ثم استنتج انه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ بحيث $\alpha\,e^{\alpha}=1$

ب) أعط حصرا لـ $\alpha$ بتقريب $0,1$ .

2) لتكن $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-Ln\,x$

ا) تحقق انه من اجل كل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

ب) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم $(\gamma)$ التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

**20**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-e^x-2$ ، $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$





1) عين نهاية $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ .

3) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم $(\gamma)$

4) ناقش حسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية $e^{2x}-e^x-2-m=0$ جبريا و بيانيا.

**21**

$f$ دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{e^x}{(1+x)^2}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية $f$ عند $-1$ و $(+\infty)$ ثم ماذا تستنتج حول المنحنى $(\gamma)$ ؟

2) أحسب $f'(x)$ من اجل كل $x$ من $]-1,+\infty[$ و بين ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-1}{x+1}$

3) شكل جدول تغيرات $f$ ثم أرسم المنحنى $(\gamma)$ .

**22**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-e)e^{-x}+1-x$

و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية $f$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) احسب $f'(x)$ وبين ان لدينا $f'(x)=e^{-x}h(x)$ حيث $h$ دالة يطلب تعيينها

1-3) ادرس حسب قيم $x$ إشارة $e-e^x$ ثم استنتج ان إذا كان:

$x>1$ فإن $1-x+e-e^x<0$ و $x<1$ فإن $1-x+e-e^x>0$

ب) شكل جدول تغيرات $f$ مستنتجا ان $f(x)$ دوما سالبة.

1-4) بين ان المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$ .

ب) بين انه توجد نقطة وحيدة $A$ من $(\gamma)$ بحيث المماس لـ $(\gamma)$ عندها يوازي $(d)$ .

**23**

$f$ دالة معرفة على مجال $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{Ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

I) $g$ دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بـ $g(x)=2x-(x-1)Ln(x-1)$

1) ما هي نهاية $g(x)$ لما $x$ يؤول الى 1 ؟

ب) احسب $g'(x)$ من اجل كل $x \rangle 1$ .

جـ) حل المتراجحة $1 - Ln(x-1) \rangle 0$ على $]1, +\infty[$

د) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ .

هـ) بين ان للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد $\alpha$ على المجال $]e+1, e^3+1[$ و ادرس إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ .

2) لتكن $h$ دالة معرفة على $]1, +\infty[$ بـ $h(x) = \dfrac{Ln(x^2-1)}{x}$

ا) عين نهاية $h(x)$ لما $x$ يؤول إلى 1 و بين ان نهاية $h(x)$ لما $x \to +\infty$ تساوي 0

ب) احسب $h'(x)$ و بين ان $h'(x)$ من إشارة $g(x^2)$ على المجال $]1, +\infty[$

جـ) بين ان $h$ متزايدة تماما على المجال $]1 , \sqrt{\alpha}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$

3- ا) تحقق انه من اجل كل $x \rangle 0$ يكون $f(x) = h(e^x)$

ب) - استنتج نهاية $f(x)$ لما $x$ يؤول إلى 0 و لما $x$ يؤول إلى $(+\infty)$

- استنتج اتجاه تغير $f$ على المجال $]0 , +\infty[$

- استنتج أن $f$ تقبل قيمة حدية عظمى عند $Ln(\sqrt{\alpha})$ ثم ارسم $(\gamma)$ .

24 -

I) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1) ادرس نهاية $g$ عند $-\infty$ و $(+\infty)$

2) ادرس إتجاه تغير $g$ على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

3) ا) بين ان للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد $\alpha$ حيث $\alpha \in ]0,94 \text{ ، } 0,941[$

ب) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) ادرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

2) ادرس نهاية $f$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

3) احسب $f'(x)$ و تحقق ان $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة مشكلا جدول تغيرات $f$ .

4) ا) بين صحة المساواة التالية $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $h$ المعرفة بـ $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ على المجال $\left]-\infty , \dfrac{5}{2}\right]$

جـ) استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب $0,01$ .

د) بين ان المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = 2x - 5$ مقارب لـ $(\gamma)$ عند $(+\infty)$ محددا وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(d)$ ثم ارسم $(d)$ و $(\gamma)$ في نفس المعلم.

III) من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ نعتبر النقط $A_n$ ، $B_n$ و $C_n$ ذات الفاصلة $n$ ،





تنتمي على التوالي إلى محور الفواصل ، المستقيم $(d)$ و المنحني $(\gamma)$ ، و ليكن $U_n$ عدد حقيقي معرف بـ $U_n = \dfrac{C_n A_n}{A_n B_n}$

1- ا) بين انه من اجل $n \geq 3$ لدينا $U_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$

ب) ما هي طبيعة المتتالية $(U_n)$ ؟

جـ) احسب نهاية المتتالية $(U_n)$ لما $n \to +\infty$ هل نستطيع تكهن هذه النتيجة من قبل ؟

25 -

$f$ دالة معرفة بـ $f(x) = e^{-x} \sin 2x$

1) احسب $f'(x)$ .

2) بين أن حلول $f'(x) = 0$ تمثل متتالية حسابية و أن صورها بالدالة $f$ تشكل متتالية هندسية .

26 -

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} & , \quad x \neq -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

1) ادرس استمرارية و قابلية اشتقاق $f$ عند $-1$ .

2) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

27 -

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^3}-1}{(\sin x)^3}$ ، 2) $\lim\limits_{x \to 0} x\, e^{\frac{1}{\sin x}}$ ، 3) $\lim\limits_{x \to -3} (x+3) e^{\frac{x+1}{x+3}}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Ln(x+1) - e^x + 1}{x^2}$ ، 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$

28 -

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 e^x$

$f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... $f^{(n)}$ هي مشتقات متتالية لـ $f$ من $n \geq 1$ .

1) احسب من اجل كل $x$ : $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$

2) بين بالتراجع انه من اجل $n \geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + \alpha_n x + \beta_n)$ حيث $\alpha_n$ و $\beta_n$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

3) تحقق أن $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + 2 \\ \beta_{n+1} = \beta_n + \alpha_n \end{cases}$

4) تحقق أن $(\alpha_n)$ هي متتالية حسابية يطلب تعيين $\alpha_n$ بدلالة $n$ .

5) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\beta_n = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1$

ثم احسب $\beta_n$ بدلالة $n$

---

**29**

$(E)$ معادلة تفاضلية $(E)$ .... $2y' + 3y = 0$

1) عين كل حلول المعادلة $(E)$ .

2) $(E')$ هي المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = x^2 + 1$

أ) عين $f$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية حلا لـ $(E')$ .

ب) بين أنه إذا كانت $g$ حلا لـ $(E')$ فإن $g - f$ حلا لـ $(E)$ و العكس صحيح.

جـ) أوجد كل حلول المعادلة $(E')$ .

3) أوجد كل حلول المعادلة $2y' + 3y = \cos x$

(البحث عن الحل من الشكل $h(x) = a\cos x + b\sin x$ )

---

**30**

عين الحل $f$ للمعادلات التفاضلية المقترحة :

أ) $y' = -3y$ و $f(0) = 2$ ، ب) $2y' + 5y = 0$ و $f(1) = 0$

جـ) $y - 2y' = 0$ و $f'(1) = 1$ ، د) $y' = -3y + 1$ و $f(1) = 0$

---

**31**

$(E)$ معادلة تفاضلية بحيث $y' = -y + 4$

1) عين الحل $f$ لـ $(E)$ بحيث $f(0) = 2$

2) أرسم المنحنى الممثل لـ $f$ على $[0,2]$ في معلم متعامد و متجانس.

3) أرسم في نفس المعلم تمثيلا مقربا لبيان $f$ بواسطة طريقة أولر .

---

**32**

$(E)$ معادلة تفاضلية بحيث $y' - 3y = +2$

بين صحة أو خطأ كل قضية من القضايا التالية :

1) المعادلة $(E)$ تقبل الدوال $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ce^{3x} + 2$ مع $c \in \mathbb{R}$ حلولا لها.

2) الحل الخاص لـ $(E)$ بحيث $f(0) = 2$ هو $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$

3) الحل الخاص $g$ للمعادلة $(E)$ الذي منحناه البياني يقبل مماسا معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0 المعرف بـ $g(x) = -\frac{2}{3} + e^{3x}$

4) المعادلة $(E)$ تقبل الدوال $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ce^{3x} + 2x$ كحلول لها .





**33**

$(E)$ معادلة تفاضلية معرفة بـ $y' + y = x + 1$

نبحث عن الحل $g$ المعرف بـ $g(x) = ax + b$ للمعادلة $(E)$

1) بين أنه إذا كانت $g$ حلا لـ $(E)$ فإنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون : $ax + a + b = x + 1$ عندئذ عين $a$ و $b$ .

2) تحقق أن الدالة $g$ المتحصل عليها هي حل لـ $(E)$ .

3) بين أن الدالة $f$ حل للمعادلة $(E)$ إذا و فقط إذا كانت $f - g$ حلا $(E') ... y' + y = 0$

4) حل المعادلة $(E')$ ثم $(E)$ .

---

**34**

$(E)$ معادلة تفاضلية معرفة بـ $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

1) عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ حلا للمعادلة $(E)$

2-أ) حل المعادلة $(E') ... y' + y = 0$ .

ب) بين أن الدالة $f$ حل للمعادلة $(E)$ إذا و فقط إذا كانت $f - g$ حلا لـ $(E')$

جـ) استنتج كل حلول المعادلة $(E)$ .

---

**35**

عند حقن مريض بكمية $A$ من دواء ما فإن الكمية المتبقية في الدم عند اللحظة $t$ بعد عملية التخلص الطبيعي هي $Ae^{-\frac{t}{24}}$ . علما أن وحدة الزمن هي الساعة $(h)$ ، مبدأ الأزمنة هي لحظة الحقن، وحدة الحجوم هي $(cm^3)$

1) ما هي كمية الدواء المتبقية بعد 8 ساعات من الحقن ؟

2) نحقن هذا المريض بجرعة $A$ كل 8 ساعات، مثل بيانيا كمية الدواء الموجودة في الدم خلال 72 ساعة التي تلي الحقن الأول.

3) يكون الدواء فعالا إذا و فقط إذا كان الدم يحتوي على كمية على الأقل تساوي $3,19A$ . باستعمال البيان السابق عين اللحظة التي ابتداء منها يصبح هذا الدواء فعال.

4-أ) بين أنه بعد الحقن رقم $n$ تكون كمية الدواء الموجودة في الدم هي $A \times \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{3}}}{1 - e^{-\frac{1}{3}}}\right)$

ب) أوجد بالحساب نتيجة السؤال (3) .

جـ) عندما تصبح كمية الدواء في الدم أكبر من $3,46A$ فإن الدواء يصبح خطيرا . هل الاستمرار في وتيرة العلاج المطبقة في (2) خطيرة أم لا ؟ إذا علمت أن مدة العلاج المحددة من طرف الطبيب هي 4 أيام ؟

**36** - نريد مقارنة الطرق المختلفة للتوفير بفائدة مركبة لذلك نودع مبلغ 10.000 DA في بنك بنسبة سنوية 5 % خلال 5 سنوات.

1) كم يصبح رصيده خلال هذه المدة ؟

2- أ) إذا كان الرصيد يزيد كل ستة أشهر بنسبة سنوية $x'$ احسب $x'$ ثم حدد رصيده خلال نفس الفترة.

ب) أجب عن السؤال ( أ ) من أجل تدخير ثلاثي الأشهر، شهري ، يومي.

مع العلم أنه إذا كانت $x$ هي النسبة المئوية السنوية فإن النسبة الشهرية المكافئة لها هي $x''$ حيث $(1+x'')^{12}=1+x$







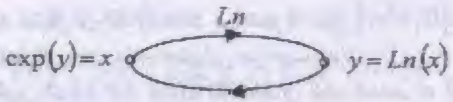
# الدرس 5

# الدَّالةُ اللوّغارِيتميَةُ النّيبرِيَةُ

## تمهيد

- رأينا في درس الدالة الأسية أن المعادلة $e^x = m$ مع $m \rangle 0$ لها حل وحيد على $\mathbb{R}$، هذا الحل رمزنا له بـ $Ln(m)$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $m$، العدد $Ln(m)$ يمثل العدد الحقيقي الذي صورته $m$ بالدالة exp عندئذ نستطيع أن نعرف على المجال $]0 , +\infty[$ الدالة $m \mapsto Ln(m)$ التي نرمز لها بصفة عامة $x \mapsto Ln(x)$.

و التي تسمى بالدالة اللوغاريتمية النيبرية و نرمز لها بـ $Ln$.




- الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة العكسية للدالة exp و العكس صحيح.

## 1 - الدالة اللوغاريتمية النيبرية

### 1 - 1 تعريف

- نسمي لوغاريتم نيبري لعدد حقيقي موجب تماما $m$، الحل الوحيد للمعادلة $e^a = m$ ذات المجهول $a$ و نرمز لهذا الحل بالرمز $Ln(m)$ و يقرأ " اللوغاريتم النيبري لـ $m$ ".

- الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما $x$ العدد الحقيقي $Ln(x)$ و نكتب $x \xrightarrow{Ln} Ln(x)$

**نتيجة**

1) من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما $x$ و $y$ لدينا :
$Ln(x)=y$ يكافئ $x=e^y$
2) $e^0=1$ يكافئ $Ln(1)=0$ و $e^1=e$ يكافئ $Ln(e)=1$
3) من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $Ln(e^x)=x$
و من اجل كل $x>0$ لدينا $\exp(Ln(x))=x$

## 1 - 2 خواص

1) الدالة $Ln$ معرفة و مستمرة على $]0,+\infty[$
2) الدالة $Ln$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $Ln'(x)=\frac{1}{x}$ و $Ln(1+h)\approx h$ لما يكون $h$ بجوار الصفر.
3) الدالة $Ln$ متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و منه نستنتج ما يلي
$0<x<1$ يكافئ $Ln(x)<0$
$x>1$ يكافئ $Ln(x)>0$
من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما $a$ و $b$ :
$a=b$ يكافئ $Ln(a)=Ln(b)$
$a<b$ يكافئ $Ln(a)<Ln(b)$

**الإثبات**

1) تقبل أن الدالة $Ln$ مستمرة على $]0,+\infty[$
2) ليكن $a$ عدد حقيقي موجب تماما.
تكون الدالة $Ln$ قابلة للاشتقاق عند العدد $a$ إذا و فقط إذا كانت نهاية النسبة $\frac{Ln(x)-Ln(a)}{x-a}$ لما $x$ يؤول إلى $a$ تساوي عدد حقيقي.
نضع $t(x)=\frac{Ln(x)-Ln(a)}{x-a}$ مع $x\neq a$.
نضع $Ln(x)=X$ و $Ln(a)=A$ و عليه لما $x\to a$ فإن $X\to Ln(a)=A$.

$$\lim_{x\to a} t(x) = \lim_{x\to a}\frac{Ln(x)-Ln(a)}{x-a}$$
$$= \lim_{X\to A}\frac{X-A}{e^X-e^A} = \lim_{X\to A}\frac{1}{\frac{e^X-e^A}{X-A}} = \frac{1}{e^A} = \frac{1}{a}$$





لأن الدالة $Ln$ قابلة للاشتقاق عند $a$ و عددها المشتق هو $\frac{1}{a}$
و عليه من اجل كل $x>0$ يكون $Ln'(x)=\frac{1}{x}$
$Ln(1+h)\approx Ln(1)+h\times Ln'(1)\approx h$
لأن $Ln(1)=0$ و $Ln'(1)=\frac{1}{1}=1$
3) بما انه من اجل كل $x>0$ لدينا $\frac{1}{x}>0$
فإن الدالة $Ln$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ .
بما ان $Ln(1)=0$ فإن من اجل $x\in]0,1[$ يكون $Ln(x)<0$
و من اجل $x>1$ يكون $Ln(x)>0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $Ln'(x)$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| تغيرات $Ln$ | ‖ | ↗ | $0$ | ↗ | |

**تمرين تدريبي 1**

عين في كل حالة من الحالات التالية المجموعة التي ينتمي إليها $x$ بحيث العبارات المعطاة ذات معنى.
1) $Ln(-x)$ ، ب) $Ln(x^2)$ ، جـ) $Ln(x-2)$
د) $Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ، هـ) $Ln|x+1|$ ، و) $Ln|x^2-3x+2|$

**✓ الحل**

بما ان الدالة $Ln$ معرفة على $]0,+\infty[$ فإن إلا الأعداد الموجبة تماما التي لها لوغاريتم.
أ) العبارة $Ln(-x)$ لها معنى إذا و فقط إذا $-x>0$ أي $x<0$ .
ب) العبارة $Ln(x^2)$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ اي $x\neq 0$ و عليه $x\in\mathbb{R}-\{0\}$
جـ) العبارة $Ln(x-2)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $x-2>0$ اي $x>2$ و عليه $x\in]2,+\infty[$ .
د) العبارة $Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $\frac{x}{x+1}>0$ و $x+1\neq 0$
اي $x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$
هـ) العبارة $Ln|x+1|$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $|x+1|>0$
اي $x+1\neq 0$
و هذا يعني ان $x\neq -1$ و منه $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$
و) العبارة $Ln|x^2-3x+2|$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $|x^2-3x+2|>0$
اي $x^2-3x+2\neq 0$

$x^2-3x+2\neq 0$ يكافئ: $(x\neq 1)$ و $(x\neq 2)$

و منه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي
$\mathbb{R}-\{1\ ,\ 2\}$

### تمرين تدريبي 2

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

1) $Ln(x^2+2)=Ln(3x)$ ، 2) $Ln(x^2+2)\geq Ln(3x)$

3) $3\left(Ln(x)\right)^2-2Ln(x)-1=0$ ، 4) $3e^{2x}-2e^x-1=0$

✓ الحل

- لحل المعادلة $Ln V(x)=Ln(U(x))$ نجد $E$ مجموعة الأعداد $x$ بحيث $U(x)\rangle 0$ و $V(x)\rangle 0$ ثم نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $V(x)=U(x)$ و لا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى $E$.
- لحل المتراجحة $Ln V(x)\leq Ln(U(x))$ نجد $E$ مجموعة الأعداد $x$ بحيث $U(x)\rangle 0$ و $V(x)\rangle 0$ ثم نحل المتراجحة $V(x)\leq U(x)$ و لا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى $E$.

1) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $x^2+2\rangle 0$

$3x\rangle 0$ يكافئ $x\rangle 0$ و منه المجموعة $E$ هي $]0,+\infty[$

نضع $V(x)=x^2+2$ و $U(x)=3x$

$V(x)=U(x)$ يكافئ $x^2-3x+2=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=2)$

بما ان 1 و 2 ينتميان إلى $E$ فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{1\ ,\ 2\}$.

2) المجموعة $E$ هي $]0,+\infty[$.

$V(x)\geq U(x)$ يكافئ: $x^2-3x+2\geq 0$

لكي يكون $x^2-3x+2\geq 0$ يجب ان يكون $x\in]-\infty\ ,\ 1]\cup[2\ ,\ +\infty[$ و منه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي:

$$S=(]0\ ,\ +\infty[)\cap(]-\infty\ ,\ 1]\cup[2\ ,\ +\infty[)=]0,\ 1]\cup[2\ ,\ +\infty[$$

3) $3(Ln\,x)^2-2Ln(x)-1=0$ ... (*)

المجموعة المرجعية $E$ هي $]0,+\infty[$.

بوضع $Ln(x)=X$ المعادلة (*) تصبح $3X^2-2X-1=0$ و هذه الأخيرة لها حلين هما 1 و $-\frac{1}{3}$

$Ln(x)=1$ يكافئ $x=e$

$Ln(x)=-\frac{1}{3}$ يكافئ $x=e^{-\frac{1}{3}}$





بما ان $e$ و $e^{-\frac{1}{3}}$ ينتميان إلى $E$ فإن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $S=\left\{e\ ,\ e^{-\frac{1}{3}}\right\}$

4) المجموعة المرجعية $E$ للمعادلة $3e^{2x}-2e^x-1=0$ هي $\mathbb{R}$.

بوضع $e^x=X$ فإن المعادلة (4) تصبح $3X^2-2X-1=0$ و هذه الأخيرة لها حلان 1 و $-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$ مرفوض لأن $X\rangle 0$ و الحل 1 مقبول.

$e^x=1$ يكافئ $x=Ln(1)=0$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (4) هي $S=\{0\}$.

## 2 - الخاصية الأساسية و نتائجها

### 2 - 1 الخاصية الأساسية

من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما $a$ و $b$ يكون $Ln(a\times b)=Ln(a)+Ln(b)$

الإثبات

لدينا $e^{Ln(a\times b)}=a\times b$ .................. (1)

$e^{Ln(a)+Ln(b)}=e^{Ln(a)}\times e^{Ln(b)}=a\times b$ ........... (2)

من (1) و (2) نجد $e^{Ln(ab)}=e^{Ln(a)+Ln(b)}$ و بما ان الدالة exp تقابل فإنه ينتج $Ln(ab)=Ln(a)+Ln(b)$.

### 2 - 2 نتائج

من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما $a$ و $b$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ لدينا:

1) $Ln\left(\frac{1}{b}\right)=-Ln(b)$ ، 2) $Ln\left(\frac{a}{b}\right)=Ln(a)-Ln(b)$ ، 3) $Ln(a^n)=n\,Ln(a)$

4) $Ln(a^{-n})=-n\,Ln(a)$ ، 5) $Ln\left(\sqrt[n]{a}\right)=\frac{1}{n}Ln(a)$

الإثبات

1) $Ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=Ln(b)+Ln\left(\frac{1}{b}\right)$ .................. (1)

$Ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=Ln(1)=0$ .................. (2)

من (1) و (2) نجد $Ln\left(\frac{1}{b}\right)=-Ln(b)$

2) $Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = Ln(a)+Ln\left(\frac{1}{b}\right)$
$= Ln(a)-Ln(b)$

3) نبرهن على صحة المساواة بالتراجع على $n$ :

نسمي $P_n$ الخاصية " $Ln(a^n)=n\,Ln(a)$ "

$P_1$ صحيحة لأن $Ln(a^1)=Ln(a)$

نفرض ان $P_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ اي $Ln(a^n)=n\,Ln(a)$

و نبرهن ان $P_{n+1}$ صحيحة اي $Ln(a^{n+1})=(n+1)\,Ln(a)$

$$Ln(a^{n+1}) = Ln(a^n\times a^1) = Ln(a^n)+Ln(a) = n\,Ln(a)+Ln(a) = (n+1)\,Ln(a)$$

منه "$P_{n+1}$" صحيحة و بالتالي $P_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ .

4) $Ln(a^{-n}) = Ln\left(\frac{1}{a^n}\right)$
$= -Ln(a^n) = -n\,Ln(a)$

5) لدينا $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ ومنه ينتج $Ln\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)=Ln(a)$ و بتطبيق نتيجة (3) نجد

$n\,Ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = Ln(a)$ بقسمة طرفي هذه المساواة على $n$ نجد $Ln\left(\sqrt[n]{a}\right)=\frac{1}{n}Ln(a)$

### ملاحظة

إذا كان $a$ و $b$ عددين حقيقيين سالبين تماما فإن $ab>0$ و بالتالي نكتب
$ab=|ab|=|a||b|$ و $Ln(ab)=Ln(|a|)+Ln(|b|)$

**مبرهنة**

إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بحيث $f(ab)=f(a)+f(b)$ فإن الدالة $f$ هي من الشكل $k.Ln$

و إذا اضيف الشرط $f(e)=1$ فإن $f$ هي الدالة $Ln$

**الإثبات**

- لدينا $f(a\times1)=f(a)+f(1)$ منه نجد $f(1)=0$
- لنعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=f(ax)-f(x)$ مع $a>0$

من اجل كل $x>0$ لدينا $g(x)=f(a)+f(x)-f(x)=f(a)$ .

إذن الدالة $g$ ثابتة.

و بما أن $g$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $g'(x)=a\,f'(ax)-f'(x)$ و $g'(x)=0$





ينتج $a\,f'(ax)=f'(x)$ .

من اجل $x=1$ نجد $a\,f'(a)=f'(1)$

و إذا وضعنا $f'(1)=k$ فإن $f'(a)=\frac{k}{a}$

إذن من اجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ يكون $f'(x)=\frac{k}{x}$ .

نعتبر الدالة $h$ المعرفة بـ $h(x)=f(x)-k\,Ln(x)$

الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $h'(x)=f'(x)-\frac{k}{x}=\frac{k}{x}-\frac{k}{x}=0$

إذن الدالة $h$ ثابتة على المجال $]0,+\infty[$

و من أجل كل $x>0$ لدينا $h(x)=h(1)=f(1)=0$ إذن $f(x)=k\,Ln(x)$ .

بما ان $f(e)=k\,Ln(e)=k$ و $f(e)=1$ فإن $k=1$ و بالتالي $f(x)=Ln(x)$ .

### تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية $A=Ln(\sqrt{2}+1)+Ln(\sqrt{2}-1)$

$B=Ln(\sqrt{2}+1)^3+Ln(\sqrt{2}-1)^3$ ، $C=Ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})-Ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

### ✓ الحل

$$A=Ln(\sqrt{2}+1)+Ln(\sqrt{2}-1)=Ln(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=Ln\left((\sqrt{2})^2-1^2\right)=Ln(1)=0$$

$$B=3\,Ln(\sqrt{2}+1)+3\,Ln(\sqrt{2}-1)=3\left(Ln(\sqrt{2}+1)+Ln(\sqrt{2}-1)\right)=3A=0$$

$$C=Ln\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)=Ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}\right)=Ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{1}\right)=2\,Ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

### تمرين تدريبي 2

حل المعادلات و المتراجحات التالية في $\mathbb{R}$ .

1) $Ln(x+4)(x+2)=Ln(8)$ ، 2) $Ln(x+4)+Ln(x+2)=Ln(8)$

3) $Ln(x+4)(x+2)\le Ln(8)$ ، 4) $Ln(x+4)+Ln(x+2)\le Ln(8)$

### ✓ الحل

لحل معادلات (متراجحات) يظهر فيها اللوغاريتم نبحث اولا عن المجموعة $E$ مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة) ثم نكتب المعادلة المعطاة على الشكل $Ln(V(x))=Ln(U(x))$ ( المتراجحة المعطاة على الشكل $Ln(V(x))\le Ln(U(x))$ )

1) $x$ لا يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$
أي $x \in ]-\infty\,,-4[\cup]-2\,,+\infty[$ و منه $E = ]-\infty,-4[\cup]-2\,,+\infty[$ .
$Ln(x+4)(x+2) = Ln(8)$ يكافئ $(x+4)(x+2) = (8)$ يكافئ $x^2+6x=0$
و حلا المعادلة $x^2+6x=0$ هما $(x=0)$ و $(x=-6)$
بما أن $0$ و $-6$ ينتميان إلى $E$ فإن مجموعة الحلول المعادلة المقترحة هي $S=\{0,-6\}$

2) $x$ لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $x+4 > 0$ و $x+2 > 0$ اي $x > -4$ و $x > -2$ و منه $E = ]-2\,,+\infty[$. و تكتب في $E$ على الشكل $Ln(x+4)(x+2) = Ln(8)...*$ .
حل المعادلة (*) يؤول إلى حل المعادلة $(x+4)(x+2)=8$
$(x+4)(x+2)=8$ يكافئ $x=0$ أو $x=-6$ و $-6$ لا ينتمي الى $E$
و بالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي $S=\{0\}$

3) المجموعة المرجعية $E$ هي $E=]-2,+\infty[$ .
المتراجحة المقترحة تكتب في $E$ على الشكل $Ln(x+4)(x+2) \leq Ln(8)$ ... *
حل المتراجحة (*) يؤول إلى حل المتراجحة $(x+4)(x+2) \leq 8$
$(x+4)(x+2) \leq 8$ يكافئ $x \in ]-6,0[$
و منه مجموعة حلول المتراجحة المقترحة هي $S = E \cap ]-6,0[ = ]-2,0[$

4) $x$ لا يكون حلا للمتراجحة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$ اي
$x \in ]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$ و منه $E=]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$ .
المتراجحة المقترحة تكتب في $E$ على شكل $(x+4)(x+2) \leq 8$ اي $x^2+6x \leq 0$
$x^2+6x \leq 0$ يكافئ $x \in ]-6,0[$
و منه مجموعة حلول المتراجحة المقترحة هي $S = E \cap ]-6,0[ = ]-6,-4[\cup]-2,0[$

## 3 دراسة الدالة $Ln$



### 3- 1 حساب النهايات عند $(+\infty)$ و 0

مبرهنة

1) $\lim_{x \to +\infty} Ln(x) = +\infty$ ، 2) $\lim_{x \to 0} Ln(x) = -\infty$

الإثبات

**الطريقة الأولى**

بوضع $Ln\ x = y$ نجد $x = e^y$.
بما ان $x$ يؤول الى $(+\infty)$ فإن $e^y$ يؤول إلى $(+\infty)$ و لكي يؤول $e^y$ الى $(+\infty)$ يجب ان يؤول $y$ إلى $(+\infty)$ اذن $\lim_{x \to +\infty} Ln(x) = +\infty$ .





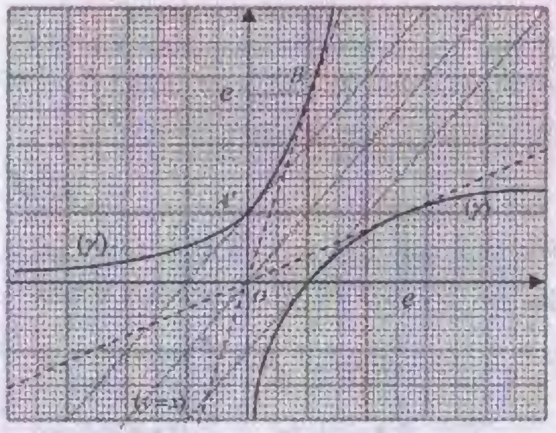
**الطريقة الثانية**

لإثبات ان $\lim_{x \to +\infty} Ln(x) = +\infty$ يجب ان نبين من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما $A$ يوجد على الأقل عدد حقيقي $\beta$ بحيث إذا كان $x > \beta$ يكون $Ln\,x > A$ .
بما ان الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $Ln\,x > A$ يكافئ $x > e^A$
اذن من أجل كل عدد حقيقي تماما $A$ يوجد عدد حقيقي $\beta = e^A$ بحيث إذا كان $x > \beta$ يكون $Ln\ x > A$ .

2) من اجل كل $x > 0$ نضع $X = \frac{1}{x}$
ومنه نجد $Ln\,x = -Ln\,X$
$\lim_{x \to 0} Ln\,x = \lim_{X \to +\infty} -Ln\,X = -\infty$

| $x$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $\frac{1}{x}$ | ‖ | + | |
| تغيرات $Ln$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

### 3 - 2 التمثيل البياني للدالة $Ln$




مبرهنة

للمنحنيان الممثلان للدالتين $Ln$ و exp متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس.

- $(\gamma')$ له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$ إذن $(\gamma)$ له مستقيم مقارب معادلته $x=0$ بجوار 0
- المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مماس لـ $(\gamma')$ عند النقطة $A'(0,1)$ و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة $A(1,0)$ .

**تمرين تدريبي 1**

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين
1) $(Ln\,x)^2 - 3(Ln\,x) + 2 = 0$ ، 2) $(Ln\,x-2)(Ln(x)-4) \leq 0$

✓ الحل

1) المجموعة المرجعية للمعادلة (1) هي $E = ]0,+\infty[$ .
بوضع $X = Ln\,x$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2-3X+2=0$
و حلول هذه الأخيرة هي 1 و 2

$Ln\,x=1$ يكافئ $x=e^1=e$

$Ln\,x=2$ يكافئ $x=e^2$

و بما أن $e$ و $e^2$ ينتميان إلى $E$ فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{e\ ,\ e^2\}$ .

2) المجموعة المرجعية للمتراجحة (2) هي $E=]0,+\infty[$ .

بوضع $X=Ln\,x$ المتراجحة (2) تكتب على الشكل $(X-2)(X-4)\le 0$

و مجموعة حلول هذه الأخيرة هي $[2\ ,\ 4]$ أي $2\le X\le 4$ لكن $Ln\,e^4=4$ و $Ln\,e^2=2$

بالتالي $Ln\,e^4\ge Ln\,x\ge Ln\,e^2$

و منه ينتج $e^4\ge x\ge e^2$ ( لأن الدالة $Ln$ متزايدة تماما)

إذن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S=[e^2,e^4]$ .

## تمرين تدريبي ❷

$(\gamma)$ المنحني البياني للدالة $Ln$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .
$C$ نقطة منه فاصلتها $a$ مع $a>0$ .

1) اكتب بدلالة $a$ معادلة المماس $(Ta)$ للمنحني $(\gamma)$ عند النقطة $C$
2) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $a>0$ أن المماس $(Ta)$ يقع فوق $(\gamma)$ .
3) استنتج انه من أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ يكون $Ln\,x\le x-1$

### ✓ الحل

1) $(Ta)$ : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ حيث $f(x)=Ln\,x$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}$

إذن $f'(a)=\frac{1}{a}$ و بالتالي $(T_a)$ : $y=\frac{1}{a}(x-a)+Ln\,a$

2) دراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(T_a)$ .

لدراسة الوضع النسبي للمنحني $(\gamma)$ بالنسبة إلى المماس $(T_a)$ ندرس إشارة المقدار $d(x)=Ln\,x-\left(\frac{x}{a}-1+Ln\,a\right)$ ومن أجل ذلك ندرس الدالة $d$ .

الدالة $d$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل $x>0$

لدينا $d'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}$ .

| $x$ | $0$ | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $d'(x)$ | + | 0 | − |
| تغيرات $d$ | ↗ | 0 | ↘ |

نلاحظ من الجدول أن من اجل كل $x\ne a$ لدينا $d(x)<0$ .

إذن المنحني $(\gamma)$ يقع تحت المماس $(Ta)$

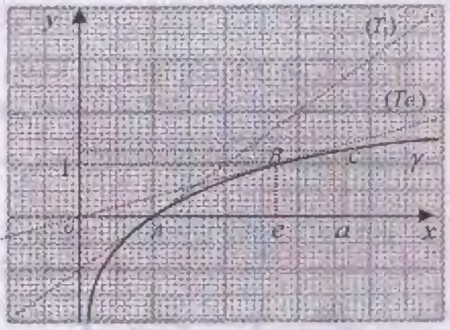




و عليه من اجل كل $x>0$ يكون

$$Ln\,x\le Ln\,a+\frac{x-a}{a}$$

3) المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة $A(1,0)$ و بالتالي المنحني $(\gamma)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$
أي من اجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ يكون $Ln\,x\le x-1$ .




## تمرين تدريبي ❸

بين انه من اجل كل $x>0$ يكون $Ln\,x<\sqrt{x}$

### ✓ الحل

الطريقة المناسبة للبرهان على أن $Ln\,x<\sqrt{x}$ من اجل كل $x>0$ هي دراسة تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln\,x-\sqrt{x}$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=4$

$2-\sqrt{x}\ge 0$ يكافئ $x\le 4$

$2-\sqrt{x}\le 0$ يكافئ $x\ge 4$

بما أن $2{,}718<e<2{,}719$ فإن $e^2>4$ و بالتالي $Ln\,e^2>Ln\,4$

أي $Ln(4)-2<0$

إذن من اجل كل $x$ من $]0,+\infty[$

يكون $f(x)<0$ و بالتالي $Ln\,x-\sqrt{x}<0$ أي $Ln\,x<\sqrt{x}$ .

| $x$ | $0$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | + | 0 | − |
| تغيرات $f$ | ↗ | $Ln(4)-2$ | ↘ |

## ❹ نهايات شهيرة

مبرهنة

1) $\lim_{h\to 0}\frac{Ln(1+h)}{h}=1$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\overset{+}{0}$ ، 3) $\lim_{h\to 0} x\,Ln\,x=\overset{-}{0}$

الإثبات

1) الدالة $Ln$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

فهي قابلة للاشتقاق عند $1$ و عددها المشتق هو $Ln'(1)=1$

إذن $\lim_{h\to0}\frac{Ln(1+h)-Ln(1)}{h}=1$ اي $\lim_{h\to0}\frac{Ln(1+h)}{h}=1$

2) بوضع $X=Ln(x)$ يكون $x=e^X$ و لما $x\to+\infty$ فإن $X\to+\infty$ .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^X}{X}}=0^+$$

3) بوضع $X=\frac{1}{x}$ يكون $x\,Ln\,x=-\frac{Ln\,X}{X}$

ولما $x$ يؤول إلى الصفر بقيم أكبر فإن $X$ يؤول إلى $+\infty$

وعليه $\lim_{x\to0^+}x\,Ln\,x=\lim_{X\to+\infty}-\frac{Ln\,X}{X}=0^-$

### ملاحظة

بوضع $x=X-1$ العبارة $\frac{Ln(1+x)}{x}$ تكتب $\frac{Ln\,X}{X-1}$

و عليه $\lim_{X\to1}\frac{Ln\,X}{X-1}=\lim_{x\to0}\frac{Ln(x+1)}{x}=1$

## التفسير الهندسي والتحليلي للنهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$

- إذا كانت $M$ نقطة كيفية من التمثيل البياني للدالة $Ln$ فإن إحداثياتها $(x\,,\,Ln\,x)$ .
المستقيم $(OM)$ معامل توجيهه $\frac{Ln\,x}{x}$ و عليه لما $x$ يأخذ قيما كبيرة جدا، فإن المستقيم $(OM)$ يقترب اكثر فاكثر من محور الفواصل، حينئذ نستطيع القول ان المنحني البياني $(\gamma)$ للدالة $Ln$ لا يقبل مستقيما مقاربا مائلا.
- المسافة العمودية بين $(\gamma)$ و محور الفواصل تتزايد ببطئ شديد كلما اخذ $x$ قيما كبيرة جدا و هذا يجعلنا نرى ان المنحني $(\gamma)$ على شكل قطع مستقيمة موازية لـ $(x'x)$ . على مجال من الشكل $[a\,,b]$ حيث $a$ و $b$ كبيرتان جدا .
- النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$ تسمح لنا بمقارنة $x$ و $Ln\,x$ من اجل قيم كبرى لـ $x$ .
نقول ان $x$ تتفوق على $Ln\,x$ بجوار $(+\infty)$ .





### تمرين تدريبي 1

احسب النهايات التالية.

(1 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+Ln\,x\right)$ ، (2 $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\,Ln\,x}$ ، (3 $\lim_{x\to+\infty}(x-Ln\,x)$

(4 $\lim_{x\to+\infty}Ln(2x+1)-Ln(x-1)$ ، (5 $\lim_{x\to+\infty}x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

### ✓ الحل

1) بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}Ln\,x=+\infty$

فإنه حسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+Ln\,x\right)=+\infty$

2) بما ان $\lim_{x\to0^+}x\,Ln\,x=0^-$ فإن $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\,Ln\,x}=-\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}Ln\,x=+\infty$ و عليه $\lim_{x\to+\infty}(x-Ln\,x)=+\infty-\infty$

من اجل كل $x>0$ يكون $f(x)=x\left(1-\frac{Ln\,x}{x}\right)$

بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

و منه نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

نبحث عن كتابة اخرى لـ $f(x)=Ln(2x+1)-Ln(x-1)$ بحيث تظهر النهايات الشهيرة.

ومن اجل كل $x>1$ يكون $f(x)=Ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

لكن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$ إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=Ln\,2$

5) $\lim_{x\to+\infty}Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

و منه نحصل على عدم التعيين من الشكل $0\times\infty$ بوضع $X=-\frac{1}{x}$ فإن العبارة $x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ تصبح $-\frac{Ln(1+X)}{X}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{X\to0}-\frac{Ln(1+X)}{X}=-1$

### تمرين تدريبي . 2

باعتبار انه من اجل كل $x > 0$ و $a > 0$ لدينا $Ln\,x \le Ln\,a + \frac{x-a}{a}$ .... *

1) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي $a > 0$ يكون ، $Ln(a+1) - Ln(a) \le \frac{1}{a}$

2) ما هو شكل المنحني $(\gamma)$ في المجال $[100, 101]$ ؟

### ✓ الحل

1) بوضع $x = a+1$ في المتباينة (*) نجد $Ln(a+1) \le Ln\,a + \frac{a+1-a}{a}$

اي $Ln(a+1) - Ln\,a \le \frac{1}{a}$ .... (**)

2) بوضع $a = 100$ في العلاقة (**) نجد $Ln\,101 - Ln\,100 \le \frac{1}{10^2}$ و منه نستنتج ان النقطتين $A(100, Ln100)$ و $B(101, Ln101)$ لهما نفس الترتيب تقريبا و هذا مما يفسر ان $(\gamma)$ في المجال $[100, 101]$ على شكل قطعة مستقيمة موازية لـ $(xx')$ .

## 5 . اللوغاريتم العشري

### 5 - 1 تعريف

نسمي الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز لها بـ $Log$ المعرفة على $]0, +\infty[$

بـ $Log\,x = \frac{Ln\,x}{Ln\,10}$ مع $Log\,10 = 1$ و $Log\,1 = 0$ .

### 5 - 2 خواص

1) الدالة $Log$ معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ .

2) الدالة $Log$ متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ لأن $Ln\,10 > 0$ .

3) الدالة $Log$ لها نفس الخواص الجبرية للدالة $Ln$ .

و بصفة خاصة انه من اجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ و من اجل كل عدد طبيعي كيفي $p$ ،

$Log\,ab = Log\,a + Log\,b$ و $Log\,a^p = p\,Log\,a$ و $Log\,10^p = p$ .

4) من اجل كل عدد حقيقي $A$ موجب تماما لدينا

$10^n \le A < 10^{n+1}$ يكافىء $n \le Log\,A < n+1$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ $(\gamma)$





### تمرين تدريبي

باعتبار ان عددا $A$ يحقق $10^n \le A < 10^{n+1}$ حيث $n$ عدد طبيعي.

1) ما هو عدد ارقام جزئه الصحيح ؟

ثم استنتج حصرا للعدد $Log\,A$ معينا الجزء الصحيح لـ $Log\,A$ .

2) اذا علمت ان $Log\,A = 5{,}52$ ما هو عدد ارقام جزئه الصحيح لـ $A$ و $\sqrt{A}$ و $A^{100}$ ؟

### ✓ الحل

1) عدد يتألف من رقمين يكون محصورا بين 10 و 100 ، و آخر يتألف من ثلاثة ارقام يكون محصورا بين 100 و 1000 و بشكل عام فإن العدد المحصور بين $10^n$ و $10^{n+1}$ عدد ارقامه $(n+1)$

$10^n \le A < 10^{n+1}$ يكافىء $n \le Log\,A < n+1$ و بالتالي الجزء الصحيح لـ $Log\,A$ هو $n$ .

2) - نعلم ان $5 \le Log\,A < 6$ و منه ينتج $10^5 \le A < 10^6$

و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح للعدد $A$ هو 6

- لدينا $Log\sqrt{A} = \frac{1}{2}Log\,A = 2{,}760$ و منه ينتج $10^2 \le \sqrt{A} < 10^3$

و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح لـ $\sqrt{A}$ هو 3

- لدينا $Log\,A^{100} = 100\,Log\,A = 552$ و عليه يكون $552 \le Log\,A^{100} < 553$

ومنه ينتج $10^{552} \le A^{100} < 10^{553}$ و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح لـ $A^{100}$ هو 553 .

## 6 . الدالة المركبة مع الدالة $Ln$

لتكن $U$ دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على مجال $I$ و لنعتبر الدالة $g$ المعرفة بـ $g = Ln\,o\,U$

**مبرهنة**

الدالة $g$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $I$ و من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

وإشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $U'(x)$ .

**الإثبات**

- من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $g'(x) = (Ln\ u(x))' = U'(x) \times L'n(U(x))$

وبما انه من اجل كل $x > 0$ لدينا $L'n(x) = \frac{1}{x}$ فإن $L'n(U(x)) = \frac{1}{U(x)}$

اذن $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

- بما ان $U(x) > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $U'(x)$ .

## نتيجة

الدالة المشتقة للدالة $x \to Ln|U(x)|$ هي الدالة $x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$

**خواص**

1) الدالتان $U$ و $Ln \circ U$ لهما نفس اتجاه التغير على $I$ .

2) في كل ما يلي نعتبر(*) إما عدد $a$ أو $+\infty$ أو $-\infty$ .

- إذا كان $\lim_{x\to *} U(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to *} Ln(U(x))=+\infty$ .
- إذا كان $\lim_{x\to *} U(x)=0$ فإن $\lim_{x\to *} Ln(U(x))=-\infty$ .
- إذا كان $\lim_{x\to *} U(x)=b$ فإن $\lim_{x\to *} Ln(U(x))=Ln(b)$ بحيث $b>0$ .

## تمرين تدريبي 1

ادرس تغيرات الدالة $g$ المعرفة بالعبارة $g(x)=Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

### ✓ الحل

- الدالة $g$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{x}{x+1}>0$

اي $x\in ]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ ومنه $D_g=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ .

- الدالة $g$ معرفة وقابلة الاشتقاق على $D_g$ لأنها مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على $D_g$ هما :

$x \xrightarrow{U} \frac{x}{x+1}$ و $x \xrightarrow{f} Ln(x)$ ,

ومن اجل كل $x$ من $D_g$ لدينا $g'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ .

ومن اجل كل $x$ من $D_g$ يكون $g'(x)>0$

و منه $g$ متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]0,+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | + | ‖ | ‖ | + |
| تغيرات $g$ | $0$ ↗ $+\infty$ | ‖ | ‖ | $-\infty$ ↗ $0$ |

- بما ان $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$ فإن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=Ln(1)=0$
- بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=Ln(1)=0$
- بما ان $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=0^+$ فإن $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$





- بما ان $\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to -1} g(x)=+\infty$

$x=0$ و $x=-1$ و $y=0$ مستقيمات مقاربة لـ $(C_g)$

## تمرين تدريبي 2

1) بدراسة تغيرات الدالة $x \xrightarrow{f} Ln\,x+1-x$ على المجال $]0,+\infty[$ بين انه من اجل كل $x>0$ يكون $Ln\,x \le x-1$ ... (1)

2) باستعمال المتباينة (1).

ا) بين انه من اجل كل $t>-1$ يكون $Ln(1+t)\le t$

ب) بوضع $x=\frac{1}{1+t}$ بين انه من اجل كل $t>-1$ يكون $Ln(1+t) \le \frac{t}{t+1}$ .

ثم استنتج حصرا للعدد $Ln(1+x)$ من أجل كل $x>-1$

3) بوضع $x=\frac{1}{p}$ مع $p$ عدد طبيعي غير معدوم .

ا) بين ان $\frac{1}{p+1}\le Ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$

ب) $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

- بين ان $U_n\le Ln(2)\le U_n+\frac{1}{2n}$ ثم استنتج ان $(U_n)$ متقاربة نحو $Ln(2)$ .
- اعط حصرا $Ln(2)$ من اجل $n=5$ .

### ✓ الحل

1) الدالة $f$ معرفة وقابلة الاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$ يكافيء $x=1$

- إذا كان $x>1$ فإن $f'(x)<0$ وبالتالي $f$ متناقصة تماما على $]1,+\infty[$ .

إذا كان $0<x<1$ فإن $f'(x)>0$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $]0,1[$ .

• $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{Ln(x)}{x}+\frac{1-x}{x}\right)=-\infty$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | ‖ + | 0 | − |
| تغيرات $f$ | ‖ $-\infty$ ↗ | $0$ | ↘ $-\infty$ |

نلاحظ من جدول تغيرات $f$ انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما. لدينا

$Ln(x) \le x-1$ اي $f(x) \le 0$

2) أ) لدينا $Ln(x) \le -1+x$ .... (I)

بوضع $x=1+t$ في العبارة (I) نجد $Ln(1+t) \le -1+(1+t)$

اي $Ln(1+t) \le t$ .... (*)

ب) بوضع $x=\frac{1}{1+t}$ في العبارة (I) نجد $Ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \le -1+\frac{1}{1+t}$

بالتبسيط $Ln(1+t) \ge \frac{t}{1+t}$ ..... (**)

من (*) و (**) نجد $\frac{t}{1+t} \le Ln(1+t) \le t$ ... (1)

إذن من اجل كل عدد حقيقي $x > -1$ لدينا $\frac{x}{1+x} \le Ln(1+x) \le x$

3) أ) بوضع $x=\frac{1}{p}$ في العبارة (I) نجد $\frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}} \le Ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$

بالتبسيط نجد $\frac{1}{p+1} \le Ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$

ب) من اجل $p=n$ لدينا $\frac{1}{n+1} \le Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$

من اجل $p=n+1$ لدينا $\frac{1}{n+2} \le Ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \le \frac{1}{n+1}$

من اجل $p=n+2$ لدينا $\frac{1}{n+3} \le Ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \le \frac{1}{n+2}$ ,

$\vdots$

من اجل $p=2n-1$ لدينا $\frac{1}{2n} \le Ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \le \frac{1}{2n-1}$

بجمع أطراف المتباينات طرفا إلى طرف وحسب خواص الدالة $Ln$ نجد :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n} \le Ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times.....\times\frac{2n}{2n-1}\right) \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+.....+\frac{1}{2n-1}$$

بالتبسيط نجد $U_n \le Ln\left(\frac{2n}{n}\right) \le U_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}$ اي $U_n \le Ln(2) \le U_n+\frac{1}{2n}$ .

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

و منه نستنتج ان $(U_n)$ متزايدة تماما على $I\!N$

بما ان $U_n \le Ln(2)$ فإنه $(U_n)$ محدودة من الأعلى وعليه فالمتتالية متقاربة نحو $\ell$





بما ان $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_n+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty} U_n = Ln\,2$$

إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = Ln(2)$

- من اجل $n=5$ لدينا $U_5 \le Ln(2) \le U_5+\frac{1}{10}$

$U_5=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$ و منه $U_5=0{,}643$ و بالتالي $0{,}643 \le Ln(2) \le 0{,}743$

## 7. دراسة الدالة $x \longmapsto a^x$ مع $a>0$ و $a\neq 1$

من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $a^x=e^{x\,Ln\,a}$

إذن $f_a(x)=e^{x\,Ln\,a}$ و تكتب ايضا $f_a(x)=e^{u(x)}$ حيث $U(x)=x\,Ln\,a$ .

إذن $f_a$ هي الدالة المركبة $exp\,OU$ التي تسمى الدالة الأسية ذات الأساس $a$ و نرمز لها ب $\exp_a$

### 7 - 1 اتجاه تغير $f_a$

**مبرهنة**

من اجل كل عدد حقيقي $a>0$ و $a\neq1$ الدالة $f_a$ المعرفة على $I\!R$ ب $f_a(x)=a^x$ قابلة للاشتقاق على $I\!R$ و من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f'(x)=(Ln\ a)a^x$

**الإثبات**

بما ان الدالة $x \xrightarrow{u} x\,Ln\,a$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $I\!R$ فإن الدالة $f_a=\exp OU$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $I\!R$ و لدينا

$$f_a'(x)=(\exp OU)'(x)=u'(x)\,\exp'(u(x))=Ln(a)\times e^{u(x)}=Ln(a)\times a^x$$

**نتيجة**

إشارة $f_a'(x)$ من إشارة $Ln(a)$ لأن $a^x>0$

- إذا كان $a>1$ فإن $f_a'(x)>0$ ومنه $f_a$ متزايدة تماما على $I\!R$ .
- إذا كان $0<a<1$ فإن $f_a'(x)<0$ ومنه $f_a$ متناقصة تماما على $I\!R$.

مثال -

$(2^x)'=Ln(2)\times 2^x$ ، $\left((\sqrt2)^x\right)'=Ln(\sqrt2)\times(\sqrt2)^x$

## 7 - 2 نهاية $f_a$ عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$

بما ان $a^x = e^{x\,Ln(a)}$ و بما ان $Ln(a)$ يغير إشارته في جوار 1 فإننا نميز حالتين بالنسبة إلى $a$ ،

- الحالة الأولى $0 < a < 1$

بما ان $0 < a < 1$ فإن $Ln(a) < 0$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,Ln(a)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,Ln(a)} = 0$$

- الحالة الثانية $a > 1$

بما ان $a > 1$ فإن $Ln(a) > 0$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,Ln(a)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,Ln(a)} = +\infty$$

إليك جدول تغيرات $f_a$ ، .

| الحالة | $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $0 < a < 1$ | إشارة $f'_a(x)$ | | − | |
| | تغيرات $f_a$ | $+\infty$ | ↘ | 0 |

| الحالة | $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $a > 1$ | إشارة $f'_a(x)$ | | + | |
| | تغيرات $f_a$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

### ملاحظة

1) الدالة $f_a$ هي الدالة العكسية للدالة $Log_a$ حيث $Log_a x = \dfrac{Ln\,x}{Ln\,a}$

$$\begin{tikzcd} Log_a\, y = \dfrac{Ln\,y}{Ln\,a} = x \arrow[r, bend left, "f_a"] & y = a^x \arrow[l, bend left, "Log_a"] \end{tikzcd}$$

2) من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f_{\frac{1}{a}}(x) = e^{x\,Ln\left(\frac{1}{a}\right)} = e^{-x\,Ln(a)} = f_a(-x)$

منه نستنتج ان المنحنيين الممثلين لـ $f_{\frac{1}{a}}$ و $f_a$ متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

### تمرين تدريبي

1) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم ارسم منحناها $(\gamma)$ حيث $f(x) = (2-x)\times 3^x$

2) ادرس تغيرات $g$ ثم ارسم منحناها $(\Gamma)$ حيث $g(x) = x - 2^x \times \dfrac{1}{Ln(2)}$





### الحل ✓

1) الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما: $x \mapsto 3^x$ و $x \mapsto 2-x$.

و لدينا $f'(x) = 3^x\left(-x\,Ln 3 + 2\,Ln(3) - 1\right)$

$f'(x) = 0$ تكافئ $x = \dfrac{2\,Ln(3)-1}{Ln(3)} = \alpha$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $\left(-x Ln(3) + 2\,Ln(3) - 1\right)$ و عليه

- إذا كان $x > \alpha$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه $f$ متناقصة تماما على $]\alpha, +\infty[$
- إذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $]-\infty, \alpha[$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (0)(+\infty)$ عدم التعيين.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^{x\,Ln(3)} = \lim_{x\to-\infty}\left[2e^{x\,Ln(3)} - x\,e^{x\,Ln(3)}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2e^{x\,Ln(3)} - \frac{1}{Ln(3)}\,x\,Ln(3)\times e^{x\,Ln(3)}\right] = 0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} x\,Ln(3)\,e^{x\,Ln(3)} = 0$ و

$\lim_{x\to-\infty} 2e^{x\,Ln(3)} = 0$

$f(\alpha) = 3{,}0135$ ، $\alpha \approx 1{,}1$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| تغيرات $f$ | 0 | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ |

2) - الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x) = 1 - 2^x = 1 - e^{x\,Ln(2)}$

$g'(x) = 0$ يكافئ $2^x = 1$ يكافئ $x = 0$ .

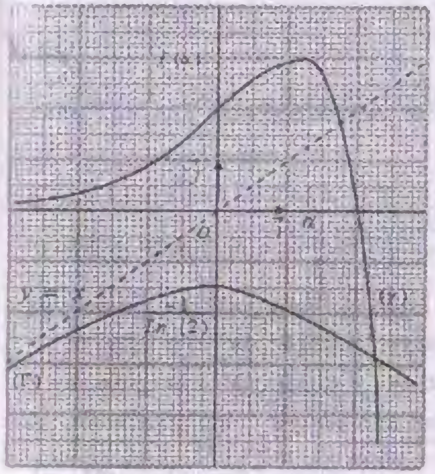
إذا كان $x > 0$ فإن $1 - 2^x < 0$ أي $g'(x) < 0$ ومنه $g$ متناقصة تماما على $]0, +\infty[$ .

إذا كان $x < 0$ فإن $1 - 2^x > 0$ أي $g'(x) > 0$ و منه $g$ متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$ .

- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | | + | 0 | − | |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ | ↗ | $\dfrac{-1}{Ln(2)}$ | ↘ | $-\infty$ |



$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[ x - \frac{1}{Ln(2)} e^{x\, Ln(2)} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[ 1 - \frac{e^{x\, Ln(2)}}{x\, Ln(2)} \right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x\, Ln(2)}}{x\, Ln(2)} = +\infty$

- للنحني $(\gamma)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} -2^x \times \frac{1}{Ln(2)} = \bar{0}$$

ومنه $(\Gamma)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ في جوار $(-\infty)$

## 8 - الأسس الحقيقية

من اجل كل عدد حقيقي $a \rangle 0$ و من اجل كل عدد حقيقي $b$ نرمز الى $a^b$ بالرمز $e^{b\, Ln(a)}$ و نكتب عندئذ $a^b = e^{b\, Ln(a)}$.

**نتيجة**

من اجل كل عدد حقيقي $b$ و من اجل كل عدد حقيقي $a \rangle 0$ لدينا

$$Ln(a^b) = b\, Ln(a)$$

**ملاحظة**

- إذا كان $b$ عدد صحيح فإن الكتابة $a^b$ لها معنى من اجل كل عدد حقيقي $a$ غير معدوم
- إذا كانت $b$ عدد حقيقي غير صحيح فإن $a^b$ لا يكون معرفا إلا من اجل $a \rangle 0$ .

**مثال**

1) $3^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}\, Ln(3)}$ ، 2) $2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} Ln(2)}$

3) $(-2)^{\frac{1}{2}} \neq e^{\frac{1}{2} Ln(-2)}$ لأن $Ln(-2)$ غير موجود

**مبرهنة**

من اجل كل عددين حقيقيين $a \rangle 0$ و $a' \rangle 0$ و من اجل كل عددين حقيقيين $b$ و $b'$ لدينا:

1) $1^b = 1$ ، 2) $a^b \times a^{b'} = a^{b+b'}$ و $(a a')^b = a^b \times a'^b$





3) $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ و $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ و $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$

**الإثبات**

1) $Ln(1^b) = b\, Ln(1) = 0$ ومنه $1^b = 1$ لأن الدالة $Ln$ متزايدة تماما.

2) $Ln(a^b)^{b'} = b' Ln(a^b) = b' b\, Ln(a) = Ln(a^{bb'})$ و عليه $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$

$$Ln\left(\frac{a^b}{a^{b'}}\right) = Ln(a^b) - Ln(a^{b'}) = b\, Ln(a) - b' Ln(a) = (b - b') Ln(a) = Ln(a^{b-b'})$$

ومنه $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ بنفس الكيفية نبين النتائج الأخرى.

**ملاحظة**

- المساواة $(e^a)^b = e^{ab}$ محققة من اجل كل $a$ عدد حقيقي و $b$ عدد صحيح و تبقى صحيحة من اجل كل عدد حقيقي $a$ و من اجل كل عدد حقيقي $b$.
- المساواة $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ غير محققة من اجل اعداد حقيقية $a \langle 0$ و هذا عندما يكون $b$ و $b'$ عددان حقيقيان غير صحيحين.

## 9 - الدوال : $x \mapsto x^n$ مع $n$ عدد صحيح غير معدوم

من اجل كل عدد صحيح $n$ غير معدوم، $f_n$ هي الدالة $x \mapsto x^n$ و $(\gamma_n)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

لما يكون $n$ عددا صحيحا سالبا غير معدوم و $x$ عددا حقيقيا غير معدوم $f_n(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}}$

لأن ندرس الدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ مع $n$ عدد طبيعي اكبر من او يساوي 1.

### 1) دراسة الدالة $x \mapsto x^n$ و $n \geq 1$

$f_n$ معرفة على $\mathbb{R}$ .

إذا كان $n$ زوجيا فإنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f_n(-x) = f_n(x)$ اي $f_n$ زوجية.

إذا كان $n$ فرديا فإنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f_n(-x) = -f_n(x)$ اي $f_n$ فردية.

- دراسة تغيرات $f_n$

بما ان $f_n$ زوجية او فردية (حسب $n$) فإننا نقتصر دراستها على $[0, +\infty[$ .

- إذا كان $n = 1$ فإن $f_n(x) = x$

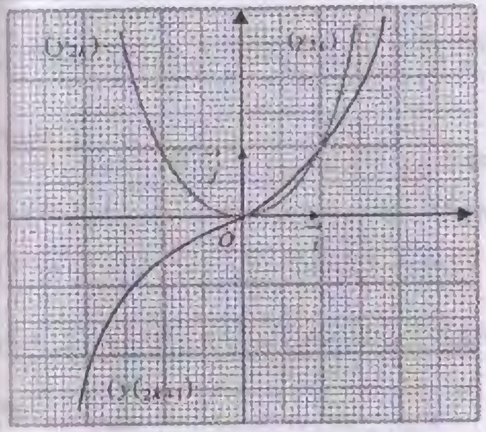
و هي دالة تالفيه بيانها مستقيم معادلته $y = x$ .

- إذا كان $n \geq 2$ فإنه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ ، $f_n'(x) = n x^{n-1}$ .

من أجل كل $x > 0$ لدينا $f'_n(x) > 0$

بالتالي $f_n$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| إشارة $f'_n(x)$ | $0$ $\quad$ $+$ |
| تغيرات $f_n$ | $0 \nearrow +\infty$ |

صورة $]0,+\infty[$ بالدالة $f_n$ هي $]0,+\infty[$

وبالتالي $f_n$ تقابل من:

$]0,+\infty[$ في $]0,+\infty[$.

و التمثيل البياني للدالة $f_n$ هو المنحني $(\gamma_n)$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة $O(0,0)$.

ب) دراسة الدالة $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ و $n \ge 1$

$f_n$ معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.

- إذا كان $n$ زوجيا فإن $f_n$ زوجية و إذا كان $n$ فرديا فإن $f_n$ فردية.
- دراسة تغيرات $f_n$

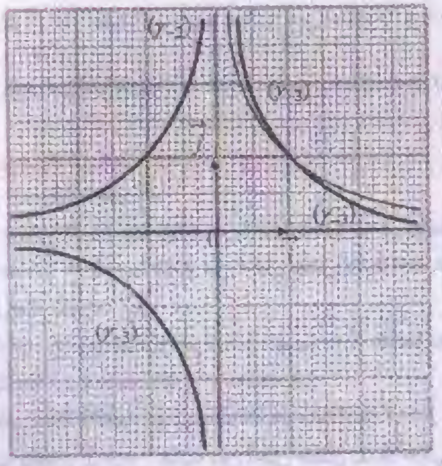
تقتصر الدراسة على $]0,+\infty[$ ( لأن $f_n$ زوجية أو فردية حسب $n$ ).

من أجل $x > 0$ يكون $f'_n(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$

من أجل كل $x > 0$ يكون $f'_n(x) < 0$

و منه $f_n$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

$\lim_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.



وإليك جدول تغيرات الدالة $f_n$

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| إشارة $f'_n(x)$ | |
| تغيرات $f_n$ | $+\infty \searrow 0$ |

بما أن صورة $]0,+\infty[$ بالدالة $f_n$ هي $]0,+\infty[$

فإن الدالة $f_n$ تقابل من $]0,+\infty[$ في $]0,+\infty[$.

المنحني $(\gamma_n)$ يقبل المستقيم $y=0$

مقاربا أفقيا و يقبل المستقيم

ذا المعادلة $x=0$ مقاربا عموديا.





### ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي $\alpha$ و من أجل كل $x > 0$ لدينا $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

و دراسة الدالة $x \mapsto x^\alpha$ على $]0,+\infty[$ يؤول إلى دراسة $x \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$

و تسمى الدالة $x \mapsto x^\alpha$ دالة الأس.

### تمرين تدريبي

$x$ عدد حقيقي يختلف عن 1. احسب المجموع التالي $S = 1 + x + x^2 + ... + x^n$

### الحل ✓

الأعداد $1$ , $x$ , $x^2$ , ... , $x^n$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $x$ و حدها الأول 1 و عدد حدود $S$ هي $n+1$

إذن $S = 1 \times \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

## 10- دالة الجذر النوني

في هذه الفقرة $n$ عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

لتكن $f_n$ الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f_n(x) = x^n$

$f_n$ تقابل من $[0,+\infty[$ في $[0,+\infty[$ إذن من أجل كل $y \in [0,+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد $x$ بحيث $x^n = y$.

إذا كان $y > 0$ فإن $\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = y$ و بالتالي $x = y^{\frac{1}{n}}$

و إذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$.

تسمى العدد الحقيقي الموجب $x$ بالجذر النوني لـ $y$

و نرمز له بـ $\sqrt[n]{\ }$ و نكتب $\sqrt[n]{y} = x$

إذن من أجل كل $x \ge 0$ و $y \ge 0$ لدينا

$y = x^n$ يكافئ $x = \sqrt[n]{y}$.

$$x = \sqrt[n]{y} \underset{\sqrt[n]{\ }}{\overset{f_n}{\rightleftarrows}} y = x^n$$

- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب $y$ العدد الحقيقي الموجب $x$ هي الدالة العكسية للدالة $f_n$.
- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ تسمى دالة الجذر النوني.

## 10-1 تعريف

دالة الجذر النوني هي الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و المعرفة على المجال $[0,+\infty[$

### ملاحظة

بما أن $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ و $x > 0$ فإن $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0}=0$

إذن نستطيع أن نعرف الدالة $\sqrt[n]{\ }$ كما يلي لما $x>0$ يكون $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0}=0$

## 10-2 خواص الدالة $\sqrt[n]{\ }$

**مبرهنة**

دالة الجذر النوني قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \to \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$

**الإثبات :**

من اجل كل $x>0$ لدينا $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}Ln(x)}$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times e^{\frac{1}{n}Ln(x)} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{x}\times(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$$

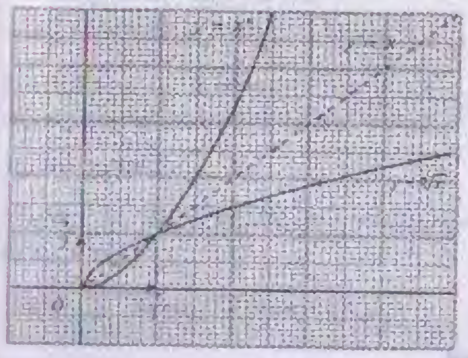
### ملاحظة

الدالة $\sqrt[n]{\ }$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و منحناها البياني له مماس عمودي عند النقطة ذات الفاصلة صفر .

**نتيجة**

دالة الجذر النوني مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

## 10-3 التمثيل البياني للدالة $\sqrt[n]{\ }$



دالة الجذر النوني هي الدالة العكسية للدالة $x \mapsto x^n$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ و منحناهما البيانيان متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة : $y=x$ .





### تمرين تدريبي 1

1) $a$ عدد حقيقي موجب يختلف عن 1 برهن أن $(a^p)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$

حيث $n$ ، $p$ عددان طبيعيان غير معدومين.

2) بسط العدد $B$ حيث $B = \sqrt[3]{54} \times \sqrt[5]{64}\ \sqrt{6}$ .

### الحل

1) $(a^p)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{p\,Ln(a)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{Ln(a)}\right)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}}$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(e^{\frac{1}{n}Ln(a)}\right)^p = \left(e^{Ln(a)}\right)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}}$

2) $B = 54^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{1}{2}} = (3^3\times 2)^{\frac{1}{3}} \times (2^6)^{\frac{1}{5}} \times (2\times 3)^{\frac{1}{2}}$

$= (3^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{61}{30}}$

### تمرين تدريبي 2

أ) حل المعادلة $x^{\frac{4}{3}}=2$ . ب) حل المتراجحة $(x-1)^{-\frac{3}{2}} \ge 2$

### الحل

1) $x^{\frac{4}{3}}=2$ برفع الطرفين إلى القوة $\frac{3}{4}$ نجد $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$ أي $x = 2^{\frac{3}{4}}$

2) $(x-1)^{\frac{-3}{2}} \ge 2$ يكافئ $\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \ge 2$ بالقلب نجد $(x-1)^{\frac{3}{2}} \le \frac{1}{2}$ و بما أن دالة الأس متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ فإنه نستنتج $\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ أي $x-1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ منه $x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+1$ .

حتى تكون المتراجحة لها معنى يجب أن يكون $x-1>0$ أي $x>1$

إذن مجموعة الحلول هي $S = \left]1\,,\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+1\right[$

## 11. مقارنة بعض الدوال بجوار $(+\infty)$

الدوال $x \to x^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 1$ ) ، $x \mapsto Ln\, x$ و $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و نهاية كل منها هي $(+\infty)$ و عليه من اجل قيم كبرى لـ $x$ الأعداد $x^n$ ، $Ln(x)$ ، $e^x$ تكبر أكثر فأكثر و الهدف هو مقارنة ترتيب المقادير $e^x$ ، $x^n$ ، $Ln(x)$ من اجل قيم كبرى لـ $x$ .

من اجل ذلك ندرس النهايات عند $(+\infty)$ للدوال $x \mapsto \frac{Ln(x)}{x^n}$ ، $x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$

**مبرهنة :**

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\, x}{x^n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

**الإثبات :**

1) بوضع $X=x^n$ يكون $x=X^{\frac{1}{n}}$ و لما $x \to +\infty$ فإن $X \to +\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\, x}{x^n}=\lim_{X\to+\infty}\frac{Ln\left(X^{\frac{1}{n}}\right)}{X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{n}\,\frac{Ln\, X}{X}=0$$

2) لدينا $\frac{e^x}{x^n}=\frac{e^x}{e^{n\, Ln(x)}}=e^{x-n\, Ln(x)}$ و عليه

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-n\, Ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\left(1-\frac{n\, Ln(x)}{x}\right)}=+\infty$$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\, x}{x}=0$

**تفسير المبرهنة :**

- بما ان $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ فإن العدد $\frac{e^x}{x^n}$ يصبح كبيرا جدا بجوار $(+\infty)$

و بصيغة اخرى من أجل قيم كبرى لـ $x$ العدد $x^n$ يصبح صغيرا جدا امام $e^x$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

- بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x^n}=0$ فإن العدد $\frac{Ln(x)}{x^n}$ يصبح صغيرا جدا من اجل قيم كبرى لـ $x$ .

و من اجل قيم كبرى لـ $x$ فإن العدد $x^n$ يصبح كبيرا جدا امام $Ln(x)$ .

نقول عندئذ من اجل قيم كبيرة بالقدر الكافي لـ $x$ ان $Ln(x) < x^n < e^x$ .

### ملاحظة

المبرهنة تبقى صحيحة في حالة $n$ عدد حقيقي موجب.





**نتيجة**

1) $\lim_{x\to0}x^n Ln\, x=0$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}x^n e^{-x}=0$

3) $\lim_{x\to-\infty}e^x x^n=0$ من أجل كل $n > 0$ ، 4) $\lim_{x\to-\infty}p(x)e^x=0$ مع $p(x)$ كثير حدود

**الإثبات**

1) بوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد $\lim_{x\to0}x^n\, Ln\, x=\lim_{X\to+\infty}-\frac{Ln\, X}{X^n}=0$

2) $\lim_{x\to+\infty}x^n e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^n}}=0$

## تمرين تدريبي 1

1) ادرس نهاية الدالة $f$ عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{e^x}{Ln\, x}$ ، ب) $f(x)=\frac{e^x}{(Ln\, x)^5}$ ، جـ) $f(x)=\frac{e^x}{x^{-\frac{2}{3}}}$

2) بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\, x)^2}=\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\, x}\right)^2$

ثم استنتج نهاية $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\, x)^2}$ عند $(+\infty)$

**الحل**

1) أ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{Ln\, x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)}{\left(\frac{Ln\, x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{Ln\, x}{x}\right)}=+\infty$$

ب) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(Ln\, x)^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5}\times\frac{1}{\left(\frac{Ln\, x}{x}\right)^5}=+\infty$$

جـ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{-\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}e^x x^{\frac{2}{3}}=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{x}\,e^x=+\infty$$

2) $$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\, x)^2}=\frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2}{(Ln\, x)^2}=\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\, x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\,x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{6\,Ln\left(x^{\frac{1}{6}}\right)}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{36}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\left(x^{\frac{1}{6}}\right)}\right)^2=+\infty$$

## تمرين تدريبي 2

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ يكون $\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}} > \frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$

2) استنتج نهاية الدالة $f$ عند $(+\infty)$ حيث $f(x)=\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}$

### ✓ الحل

1) من أجل كل $x>0$ يكون $5x+3>x$ و بما أن الدالة exp متزايدة تماما فإنه ينتج $e^{5x+3}>e^{x}$ و بالقسمة على $x^{\frac{5}{2}}$ نجد $\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}} > \frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{5}\right)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x^{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(32\frac{e^{2x}}{(2x)^{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{X\to+\infty}\left(32\frac{e^{X}}{X^{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=+\infty$$

لأن $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^{X}}{X^{n}}=+\infty$ حيث $X=2x$ .

بما أن $f(x)\geq\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}=+\infty$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$





# تطبيقات نموذجية

## تطبيق 1 تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية $x$ التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى:

أ) $Ln(1-x)$ ، ب) $Ln(x^3)$ ، جـ) $\frac{1}{x}Ln(1+x)$

د) $Ln(2x^2-4)$ ، هـ) $Ln(2x-4)(3-x)$

و) $Ln(2x-4)+Ln(3-x)$ ، ن) $Ln(x^2+x+1)$

### ✓ الحل

أ) حتى يكون للعبارة $Ln(1-x)$ معنى يجب أن يكون $1-x>0$ أي $x<1$
ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $]-\infty,1[$

ب) حتى يكون للعبارة $Ln(x^3)$ معنى يجب أن يكون $x^3>0$ أي $x>0$
ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $]0,+\infty[$

جـ) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x}Ln(1+x)$ معنى يجب أن يكون $1+x>0$ و $x\neq0$
أي $x>-1$ و $x\neq0$
ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

د) حتى يكون للعبارة $Ln(2x^2-4)$ معنى يجب أن يكون $2x^2-4>0$
أي $x\in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$
ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

هـ) حتى يكون للعبارة $Ln(2x-4)(3-x)$ معنى يجب أن يكون $(2x-4)(3-x)>0$
أي $x\in]2,3[$ ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $]2,3[$

و) حتى يكون للعبارة $Ln(2x-4)+Ln(3-x)$ معنى يجب أن يكون $3-x>0$ و $2x-4>0$
أي $x<3$ و $x>2$
ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]2,3[$

ن) حتى يكون للعبارة $Ln(x^2+x+1)$ معنى يجب أن يكون $x^2+x+1>0$
مميز $x^2+x+1$ هو $\Delta=-3$
ومنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $x^2+x+1>0$
إذن مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=\mathbb{R}$ .

## تطبيق 2 تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية $x$ التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى :

أ) $Ln(x^2+9x)$ ؛ ب) $Ln(|x^2-3x+2|)$

جـ) $Ln(|x-1|)-Ln(|x+1|)$ ؛ د) $Ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$

هـ) $Ln(\sqrt{x-1}-2)$ ؛ و) $Ln(x|x|-1)$

ن) $\frac{\sqrt{x+3}}{Ln(x+1)}$ ؛ ي) $\frac{1}{x\,Ln\,x}$

### ✓ الحل

أ) حتى يكون للعبارة $Ln(x^2+9x)$ معنى يجب أن يكون $x^2+9x>0$

$x^2+9x>0$ يكافئ $x\in]-\infty,-9[\cup]0,+\infty[$

ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]-\infty,-9[\cup]0,+\infty[$

ب) حتى يكون للعبارة $Ln(|x^2-3x+2|)$ معنى يجب أن يكون $|x^2-3x+2|>0$

$|x^2-3x+2|>0$ يكافئ $x^2-3x+2\neq0$ يكافئ $(x\neq1)$ و $(x\neq2)$

إذن مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=\mathbb{R}-\{1,2\}$

جـ) حتى يكون للعبارة $Ln(|x-1|)-Ln(|x+1|)$ معنى يجب أن يكون $|x-1|>0$ و $|x+1|>0$

أي $x-1\neq0$ و $x+1\neq0$

$(x-1\neq0$ و $x+1\neq0)$ يكافئ $(x\neq1)$ و $(x\neq-1)$

إذن مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

د) حتى يكون للعبارة $Ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$ معنى يجب أن يكون $\frac{x-2}{3-x}>0$ و $3-x\neq0$

$\frac{x-2}{3-x}>0$ إذا و فقط إذا كان $x\in]2,3[$

إذن مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]2,3[$

هـ) حتى يكون لـ $Ln(\sqrt{x-1}-2)$ معنى يجب أن يكون $x-1\geq0$ و $\sqrt{x-1}-2>0$

$x-1\geq0$ يكافئ $x\geq1$

$\sqrt{x-1}-2>0$ يكافئ $\sqrt{x-1}>2$ يكافئ $x-1>4$ يكافئ $x>5$ ؛

ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]5,+\infty[$

و) حتى تكون للعبارة $Ln(x|x|-1)$ معنى يجب أن يكون $x|x|-1>0$ ............ (I)

حل المتراجحة (I) ؛





- حالة $x\geq0$ ؛

المتراجحة (I) تكافئ $x^2-1>0$ تكافئ $x>1$

ومنه مجموعة الحلول في هذه الحالة هي $]1,+\infty[$

- حالة $x\leq0$ ؛

المتراجحة (I) تكافئ $-x^2-1>0$ تكافئ $x^2+1<0$

المتباينة $x^2+1<0$ خاطئة ومنه مجموعة حلول المتراجحة $x|x|-1>0$ هي $\phi$

إذن مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=\phi\cup]1,+\infty[=]1,+\infty[$

ن) حتى يكون للعبارة $\frac{\sqrt{x+3}}{Ln(x+1)}$ معنى يجب أن يكون $x+3\geq0$ و $x+1>0$

و $Ln(x+1)\neq0$ و هذا يعني $x\geq-3$ و $x>-1$ و $x+1\neq1$

أي $x\geq-3$ و $x\geq-1$ و $x\neq0$

إذن مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]-1,0[\cup]0,+\infty[$

ي) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x\,Ln(x)}$ معنى يجب أن يكون $x>0$ و $Ln(x)\neq0$

أي $x>0$ و $x\neq1$

ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$

## تطبيق 3 تعيين عبارة دالة

$f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}Ln\,x$ مع $a$ و $b$ عددان حقيقيان، $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس، $A(1,0)$ نقطة من $(C_f)$ ، المماس لـ $(C_f)$ في $A$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=3x+2$

1) احسب من أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ عبارة $f'(x)$

2) أ) بين أن $f'(1)=3$ ، ثم استنتج أن $a+1=3$

ب) بين أن $a+b=0$ ، ثم استنتج عبارة $f(x)$

### ✓ الحل

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا ؛

$$f'(x)=a+\left(\frac{-1}{x^2}\right)Ln(x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=a+\frac{1}{x^2}[-Ln(x)+1]$$

2) أ) بما أن المماس للمنحني $(C_f)$ عند $A$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=3x+1$ فإن ميله هو 3 و عليه فإن $f'(1)=3$

لدينا $f'(1)=a+[-Ln(1)+1]=a+1$ ومنه نستنتج أن $a+1=3$

ب) بما أن $A(1,0)$ تنتمي إلى $(C_f)$ فإن $f(1)=0$

$f(1)=0$ يكافئ $a+b=0$

لدينا $\begin{cases} a+1=3 \\ a+b=0 \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$ إذن $f(x)=2x-2+\frac{1}{x}Ln(x)$

## تطبيق 4 تعيين اتجاه تغير دالة

$f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{3}{x}+Ln\,x$

1) بين أن $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $f'(x)$

2) شكل جدول تغيرات $f$ ثم استنتج أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)>0$

✓ الحل

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{-3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-3+x}{x^2}$

2) إشارة $f'(x)$ من إشارة $-3+x$ لأن المقام موجب تماما و عليه :

إذا كان $x=3$ فإن $f'(3)=0$

إذا كان $x>3$ فإن $f'(x)>0$

إذا كان $0<x<3$ فإن $f'(x)<0$

لدينا $f(3)=1+Ln\,3$

و بما أن $Ln\,3>0$ فإن $f(3)>0$

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | ‖ | ↘ | $f(3)$ | ↗ | |

نستنتج من جدول تغيرات $f$ أنه من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)\geq f(3)$ أي $f(x)>0$

## تطبيق 5 حساب المشتق

$f$ ، $g$ ، $h$ ثلاث دوال معرفة على $]0,+\infty[$ بـ :

$f(x)=x\,Ln\,x$ ، $g(x)=\frac{Ln\,x}{x}$ ، $h(x)=Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

- عين $f'(x)$ ، $g'(x)$ ، $h'(x)$

✓ الحل

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن أجل كل $x>0$ لدينا $f'(x)=Ln\,x+\frac{1}{x}\times x$ أي $f'(x)=1+Ln\,x$





ب) الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{1-Ln\,x}{x^2}$

جـ) الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ هما $x\xrightarrow{h_1}\frac{x}{x+1}$ و $x\xrightarrow{h_2}Ln\,x$ مع $(h=h_2 o h_1)$

ومن أجل كل $x>0$ لدينا $h'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}=\frac{1}{x(x+1)}$

## تطبيق 6 تبسيط أعداد باستعمال لوغاريتم الجداء

بسط الأعداد التالية :

$Ln(4)+Ln\left(\frac{1}{4}\right)$ ، $Ln\left(\frac{1}{5}\right)$ ، $Ln(\sqrt{5}+2)+Ln(\sqrt{5}-2)$

$Ln(\sqrt{17}+4)-Ln(\sqrt{17}-4)$ ، $Ln(567)-Ln(72)-Ln\frac{7}{8}+Ln\left(\frac{1}{27}\right)$

$Ln\sqrt{\sqrt{5}+2}+Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ ، $Ln\sqrt{135}+Ln\sqrt{75}-Ln15-Ln\sqrt{27}$

✓ الحل

- $Ln(4)+Ln\left(\frac{1}{4}\right)=Ln\left(4\times\frac{1}{4}\right)=Ln(1)=0$

حسب قاعدة لوغاريتم مقلوب عدد يكون $Ln\left(\frac{1}{5}\right)=-Ln(5)$

- $Ln(\sqrt{5}+2)+Ln(\sqrt{5}-2)=Ln(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=Ln(5-4)=Ln(1)=0$

- $Ln(\sqrt{17}+4)-Ln(\sqrt{17}-4)=Ln\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right)=Ln\left(\frac{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)$

$=Ln\left(\frac{17-16}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=Ln\left(\frac{1}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=-2Ln(\sqrt{17}-4)$

- $Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)+Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)=Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$

$=Ln\left(\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\right)=Ln\left(\sqrt{5-4}\right)=Ln\sqrt{1}=0$

- $Ln\,567-Ln\,72-Ln\left(\frac{7}{8}\right)+Ln\left(\frac{1}{27}\right)=Ln(3^4\times7)-Ln(2^3\times3^2)-Ln\frac{7}{8}-Ln(27)$

$=4Ln(3)+Ln(7)-3Ln(2)-2Ln(3)-Ln(7)+3Ln(2)-3Ln(3)$

$$= -Ln(3)+Ln(7) = Ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

• $Ln(\sqrt{135})+Ln\sqrt{75}-Ln15-Ln(\sqrt{27})=\frac{1}{2}Ln135+\frac{1}{2}Ln75-Ln15-\frac{1}{2}Ln27$

$$=\frac{1}{2}(3Ln3+Ln5)+\frac{1}{2}(Ln3+2Ln5)-Ln3-Ln5-\frac{3}{2}Ln3$$

$$=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1-\frac{3}{2}\right)Ln3+\left(\frac{1}{2}+1-1\right)Ln5$$

$$=-\frac{1}{2}Ln3+\frac{1}{2}Ln5=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{5}{3}\right)=Ln\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

## تطبيق 7 إثبات صحة مساواة

برهن انه من اجل كل $x>0$ يكون لدينا :

أ) $Ln(x+2)=Ln\,x+Ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ، ب) $Ln(2+x^2)=2\,Ln\,x+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$

جـ) $Ln(x^2+x+1)=2\,Ln\,x+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

د) $Ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)=Ln\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right)$

✓ الحل

أ) $Ln(x+2)=Ln(x)\left(1+\frac{2}{x}\right)=Ln\,x+Ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

ب) $Ln(2+x^2)=Ln(x^2)\left(\frac{2}{x^2}+1\right)=Ln\,x^2+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$

$$=2\,Ln\,x+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$$

جـ) $Ln(x^2+x+1)=Ln(x^2)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=Ln(x^2)+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$=2\,Ln\,x+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

د) $Ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)=Ln\left(\frac{x(x+1)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=Ln\left(\frac{x+1}{1+\frac{1}{x}}\right)$





## تطبيق 8 تعيين مجموعة تكون فيها مساواة صحيحة

عين مجموعة الأعداد $x$ التي من اجلها تكون المساواة صحيحة في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $Ln(2+x)=Ln\,x+Ln\left(\frac{2}{x}+1\right)$ ، ب) $Ln(x^2-1)=Ln(x+1)+Ln(x-1)$

جـ) $Ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=Ln(x+1)-Ln(x-2)$ ، د) $Ln(x^2)=2\,Ln(-x)$

✓ الحل

أ) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$2+x>0$ و $x>0$ و $\frac{2}{x}+1>0$

اي $x>-2$ و $x>0$ و $x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

إذن مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]0,+\infty[$ $D=]-2,+\infty[$

ب) حتى تكون المساواة صحيحة يجب ان يكون $x^2-1>0$ و $x+1>0$ و $x-1>0$

اي $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ و $x>-1$ و $x>1$

ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]1,+\infty[$ $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

جـ) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$\frac{x+1}{x-2}>0$ و $x-2\neq0$ و $x+1>0$ و $x-2>0$

اي $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ و $x>-1$ و $x>2$

ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]2,+\infty[$

د) حتى تكون المساواة صحيحة يجب ان يكون $x^2>0$ و $-x>0$

اي $x\in\mathbb{R}^*$ و $x\in]-\infty,0[$

ومنه مجموعة قيم $x$ المطلوبة هي $D=]-\infty,0[$ .

## تطبيق 9 حل معادلات

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln(3x+2)=0$ ، ب) $Ln(3x+2)=1$ ، جـ) $Ln(3x+2)=-1$

د) $Ln(3x-2)=2$ ، هـ) $Ln(x-2)+Ln(x-32)=6\,Ln2$

و) $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln3$

✓ الحل

أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2>0$ أي $x>-\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]-\frac{2}{3},+\infty[$

$Ln(3x+2)=0$ تعني $Ln(3x+2)=Ln(1)$

ومنه نستنتج $3x+2=1$ أي $x=\frac{-1}{3}$

بما أن $\frac{-1}{3}\in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة $Ln(3x+2)=0$ هي $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2>0$ أي $x>-\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (المجموعة المرجعية) هي $D=\left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$

$Ln(3x+2)=1$ تعني $Ln(3x+2)=Ln(e)$

ومنه ينتج $3x+2=e$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{e-2}{3}$ .

بما أن $\frac{e-2}{3}\in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{e-2}{3}\right\}$

جـ) المجموعة المرجعية هي $D=\left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$

المساواة $Ln(3x+2)=-1$ تكتب $Ln(3x+2)=Ln\left(\frac{1}{e}\right)$

ومنه ينتج $3x+2=\frac{1}{e}$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}$ .

بما أن $\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}$ ينتمي إلى $D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}\right\}$

د) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x-2>0$ أي $x>\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$ .

المساواة $Ln(3x-2)=2$ تكتب $Ln(3x-2)=Ln(e^2)$

ومنه نستنتج $3x-2=e^2$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{e^2+2}{3}$

بما أن $\frac{e^2+2}{3}>\frac{2}{3}$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{e^2+2}{3}\right\}$ .





هـ) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون :

$x-2>0$ و $x-32>0$ أي $x>2$ و $x>32$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]32,+\infty[$

المساواة $Ln(x-2)+Ln(x-32)=6\,Ln(2)$ تكتب $Ln(x-2)(x-32)=Ln(2^6)$

أي $(x-2)(x-32)=64$ بالتبسيط نجد $x^2-34x=0$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=0$ أو $x=34$ ،

بما أن 0 لا ينتمي إلى $D$ فهو مرفوض

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{34\}$

و) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون :

$-2x+5>0$ و $4x-5>0$ أي $x<\frac{5}{2}$ و $x>\frac{5}{4}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=\left]\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right[$ .

المساواة $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln(3)$ تكتب $Ln(-2x+5)(4x-5)=Ln\left(\frac{1}{3}\right)$

و منه ينتج $(-2x+5)(4x-5)=\frac{1}{3}$ بالتبسيط نجد $-24x^2+90x-76=0$

مميز المعادلة $-24x^2+90x-76=0$ هو $\Delta=804$

بما أن $\Delta>0$ فإن للمعادلة حلان $x_1=\frac{-90+\sqrt{804}}{-48}$ و $x_2=\frac{-90-\sqrt{804}}{-48}$

$x_1$ و $x_2$ ينتميان إلى $D$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln\,3$ هي $S=\{x_1,x_2\}$

## تطبيق 10 حل معادلات

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln\,x=Ln(x^2+4x)$ ، ب) $2\,Ln(x+1)=Ln(x+5)+Ln(2x+2)$

جـ) $Ln(x+2)+Ln(x+1)=Ln(x+10)$

د) $Ln(\sqrt{3x-1})+Ln(\sqrt{x-1})=Ln(x-2)$

✓ الحل

أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $x>0$ و $x^2+4x>0$

أي $x>0$ و $x\in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0,+\infty[$ .

المساواة $Ln(x)=Ln(x^2+4x)$ تكتب $x=x^2+4x$ اي $x^2+3x=0$

$x^2+3x=0$ تكافئ $x=0$ او $x=-3$

بما أن 0 و 3- لا ينتميان إلى $D$

فإن المعادلة $Ln\,x=Ln(x^2+4x)$ ليس لها حلول.

ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب ان يكون :

$x+1>0$ و $x+5>0$ و $2x+2>0$ اي $x>-1$ و $x>-5$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]-1,+\infty[$

المساواة $2\,Ln(x+1)=Ln(x+5)+Ln(2x+2)$ تكتب $Ln(x+1)^2=Ln(x+5)(2x+2)$

ومنه ينتج $x^2+10x+9=0$ ........ (1)

بما ان مميز المعادلة (1) هو $\Delta=64$ فإن للمعادلة حلان هما $x_1=-1$ و $x_2=-9$

بما ان $x_1$ و $x_2$ لا ينتميان الى $D$

فإن المعادلة (ب) ليس لها حلول.

جـ) حتى تكون للمساواة (جـ) لها معنى يجب ان يكون :

$x+2>0$ و $x+1>0$ و $x+10>0$

اي $x$ ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ ومنه $D=]-1,+\infty[$ .

المساواة $Ln(x+2)+Ln(x+1)=Ln(x+10)$ تكتب $Ln(x+2)(x+1)=Ln(x+10)$

و منه ينتج $(x+2)(x+1)=x+10$ بالتبسيط نجد $x^2+2x-8=0$ ... (2)

مميز المعادلة (2) هو $\Delta=36$

ومنه المعادلة (2) لها حلان هما $x_1=2$ و $x_2=-4$

بما ان $2\in D$ و $-4\notin D$

فإن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\{2\}$ .

د) حتى تكون للمساواة (د) لها معنى يجب ان يكون :

$3x-1>0$ و $x-1>0$ و $x-2>0$ اي $x>\frac{1}{3}$ و $x>1$ و $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D=]2\,,+\infty[$ .

المعادلة (د) تكتب على الشكل $Ln\left(\sqrt{3x-1}\times\sqrt{x-1}\right)=Ln\,(x-2)$

اي $Ln\sqrt{(3x-1)(x-1)}=Ln\,(x-2)$ ومنه ينتج $\left(\sqrt{(3x-1)(x-1)}\right)=x-2$

بتربيع الطرفين نجد $(3x-1)\,(x-1)=x^2-4x+4$ و بالتبسيط نجد $2x^2-3=0$

حلول المعادلة $2x^2-3=0$ هما $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

بما ان $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ لا ينتميان إلى $D$

فإن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $\phi$ .





## تطبيق 11 حل متراجحات

حل المتراجحات التالية :

أ) $Ln(2x-4)\geq 0$ ، ب) $Ln(2x-4)>1$ ، جـ) $Ln(x-4)\geq Ln\,2$

د) $Ln\left(\frac{1}{x}\right)>3$ ، هـ) $(Ln\,x)^2\leq 36$

### الحل

أ) حتى تكون للمتراجحة (أ) معنى يجب ان يكون $2x-4>0$ اي $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $D=]2,+\infty[$ .

المتراجحة $Ln(2x-4)\geq 0$ تكتب $Ln(2x-4)\geq Ln\,1$ ومنه ينتج $2x-4\geq 1$ اي $x\geq\frac{5}{2}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[\cap D=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

ب) حتى تكون للمتراجحة (ب) معنى يجب ان يكون $2x-4>0$ اي $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]2,+\infty[$

المتراجحة $Ln(2x-4)\geq 1$ تكافئ $2x-4\geq e$ اي $x\geq\frac{e+4}{2}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left[\frac{e+4}{2},+\infty\right[\cap]2,+\infty[=\left[\frac{e+4}{2},+\infty\right[$

جـ) حتى تكون للمتراجحة (جـ) معنى يجب ان يكون $x-4>0$ اي $x>4$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D=]4,+\infty[$

المتراجحة $Ln(x-4)\geq Ln(2)$ تكافئ $x-4\geq 2$ اي $x\geq 6$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=[6,+\infty[\cap]4,+\infty[=[6,+\infty[$

د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب ان يكون $\frac{1}{x}>0$ و $x>0$ اي $x\in]0,+\infty[$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D=]0,+\infty[$ .

المتراجحة $Ln\left(\frac{1}{x}\right)>3$ تكافئ $\frac{1}{x}>e^3$ ومنه ينتج $x<e^3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=(]0,+\infty[)\cap(]-\infty,e^3[)=]0\,,e^3[$

هـ) حتى يكون للمتراجحة (هـ) معنى يجب ان يكون $x>0$

و منه مجموعة تعريف المتراجحة (هـ) هي $D=]0,+\infty[$

المتراجحة $(Ln\,x)^2\leq 36$ تكافئ $-6\leq Ln\,x\leq 6$ و هذه الأخيرة تكافئ :

$Ln\,e^{-6}\leq Ln\,x\leq Ln\,e^6$ و بما ان الدالة $Ln$ متزايدة تماما فإنه ينتج $e^{-6}<x<e^6$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S=(]0,+\infty[)\cap(]e^{-6},e^6[)=]e^{-6},e^6[$

## تطبيق 12 حل متراجحات

حل المتراجحات التالية :

أ) $Ln(3x^2+5x) \geq Ln(6x+10)$ ، ب) $3Ln(x+1) > Ln(3x+1)$

جـ) $Ln(3x^2-x) \leq Ln\,x + Ln\,2$ ، د) $Ln(4-x) - Ln\,3 + Ln\,x \geq 0$

✓ الحل

أ) حتى يكون للمتراجحة (أ) معنى يجب أن يكون $6x+10 > 0$ و $3x^2+5x > 0$

اي $x > \frac{-5}{3}$ و $x \in \left]-\infty, \frac{-5}{3}\right[ \cup \left]0, +\infty\right[$

إذن مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $D = \left]0, +\infty\right[$

المتراجحة $Ln(3x^2+5x) \geq Ln(6x+10)$ تكافئ $3x^2+5x \geq 6x+10$

اي $3x^2-x-10 \geq 0$ .... (1)

مميز كثير الحدود $(3x^2-x-10)$ هو $\Delta = 121$

ومنه للمعادلة $3x^2-x-10=0$ حلان هما $x_1 = 2$ و $x_2 = \frac{-5}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-5}{3}$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-x-10$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

من الجدول المجاور نستنتج ان مجموعة حلول المتراجحة (1) هي :

$$S = \left( \left]-\infty, \frac{-5}{3}\right[ \cup \left]2, +\infty\right[ \right) \cap \left]0, +\infty\right[$$

ب) حتى يكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون :

$x+1 > 0$ و $3x+1 > 0$ اي $x > -1$ و $x > \frac{-1}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

المتراجحة $3Ln(x+1) > Ln(3x+1)$ تكافئ $Ln(x+1)^3 > Ln(3x+1)$

و منه ينتج $(x+1)^3 > 3x+1$ بالتبسيط نجد $x^2(x+3) > 0$ ..... (2)

و مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $\left]-3, 0\right[ \cup \left]0, +\infty\right[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = D \cap \left(\left]-3,0\right[ \cup \left]0,+\infty\right[\right) = \left]-\frac{1}{3}, 0\right[ \cup \left]0, +\infty\right[$

جـ) حتى يكون للمتراجحة (جـ) معنى يجب أن يكون $3x^2-x > 0$ و $x > 0$ اي :

$x \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ و $x > 0$





ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (جـ) هي $D = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

للمتراجحة (جـ) تكتب على الشكل $Ln(3x^2-x) \leq Ln(2x)$ ومنه ينتج $3x^2-x \leq 2x$

بعد التبسيط نجد $3x(x-1) \leq 0$

$3x(x-1) \leq 0$ يكافئ $x \in [0,1]$.

و منه مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S = D \cap [0,1] = \left]\frac{1}{3}, 1\right]$

د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $4-x > 0$ و $x > 0$

اي $x < 4$ و $x > 0$ و منه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D = \left]0, 4\right[$

المتراجحة (د) تكتب على الشكل $Ln\frac{(4-x)(x)}{3} \geq Ln(1)$ و منه ينتج $\frac{(4-x)(x)}{3} \geq 1$

بعد التبسيط نجد $-x^2+4x-3 \geq 0$ ..... (2)

مميز $(-x^2+4x-3)$ هو 4 و منه للمعادلة $-x^2+4x-3=0$ حلان هما 1 و 3

$-x^2+4x-3 \geq 0$ إذا و فقط إذا كان $x \in [1,3]$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S = D \cap [1,3] = [1.3]$

## تطبيق 13 حل معادلات تشمل القيمة المطلقة

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln|x-1| + Ln|x+1| = 0$ ، ب) $Ln(|x-1|) + Ln(x+5) = 3Ln(2)$

جـ) $Ln(|2x+5|) + Ln(|x|) = 2Ln(|x+1|)$

د) $Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) + 1 = 0$

✓ الحل

أ) حتى يكون للمعادلة (أ) معنى يجب أن يكون $|x-1| > 0$ و $|x+1| > 0$

اي $x \neq 1$ و $x \neq -1$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $D = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

المعادلة (أ) تكتب على الشكل $Ln(|x-1||x+1|) = Ln(1)$ ومنه ينتج $|x^2-1| = 1$ ... (1)

$|x^2-1| = 1$ يكافئ $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$ او $x = 0$

و منه حلول المعادلة (1) هي $0$ , $\sqrt{2}$ , $-\sqrt{2}$

بما ان $0$ , $\sqrt{2}$ , $-\sqrt{2}$ ينتميان الى $D$ فإن مجموعة حلول المعادلة (أ) هي:

$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}$.

ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $D = ]-5, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

المعادلة (ب) تكتب $Ln|x-1|(x+5) = Ln(8)$ منه ينتج $|x-1|(x+5) = 8$ ... (2)

- إذا كان $-5 < x < 1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2+4x+3=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $x=-1$ و $x=-3$

وبما أن $-1$ و $-3$ ينتميان إلى $]-5, 1[$ فهما مقبولان.

- إذا كان $x > 1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2+4x-13=0$

و حلا هذه الأخيرة هما $\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}$ ، $\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$ .

$\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$ مرفوض لأنه ليس أكبر من الواحد.

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S = \left\{\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}, -1, -3\right\}$

جـ) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $|2x+5| > 0$ و $|x| > 0$ و $|x+1| > 0$

أي $x \neq \frac{-5}{2}$ و $x \neq 0$ و $x \neq -1$

ومنه فإن مجموعة تعريف المعادلة (جـ) هي $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}, 0, -1\right\}$

المعادلة (جـ) تكتب على الشكل $Ln\left(|2x+5||x|\right) = Ln\left(|x+1|^2\right)$

و منه ينتج $|x(2x+5)| = (x+1)^2$ ... (3)

- إذا كان $x \in \left]\frac{-5}{2}, -1\right[ \cup ]-1, 0[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل $3x^2+7x+1=0$

و حلا هذه الأخيرة هما $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ ، $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

$x_1$ و $x_1$ ينتميان إلى $\left]\frac{-5}{2}, 0\right[ - \{-1\}$ فهما مقبولان

- إذا كان $x \in \left]-\infty, \frac{-5}{2}\right[ \cup ]0, +\infty[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل

$x^2+3x-1=0$ و حلا هذه الأخيرة هما $x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ، $x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

$x_3$ و $x_4$ مقبولان لأنهما ينتميان إلى $\left]-\infty, \frac{-5}{2}\right[ \cup ]0, +\infty[$ .

إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

د) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 0$ و $x-1 \neq 0$

أي $x \neq -2$ و $x \neq 1$ ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D = \mathbb{R} - \{1, -2\}$





المعادلة (د) تكتب على الشكل $Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) = Ln\, e^{-1}$ ومنه ينتج $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = e^{-1}$ ... (4)

- إذا كان $x \in ]-2, 1[$ فإن المعادلة (4) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} = -e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x = \frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}$ و هذا الحل مقبول لأنه ينتمي إلى $]-2, 1[$

- إذا كان $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty[$ فإن المعادلة (4) تكتب $\frac{x+2}{x-1} = e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x = \frac{2e+1}{1-e}$ و هذا حل مقبول لأنه ينتمي إلى $]-\infty, -2[$ .

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S = \left\{\frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}, \frac{2e+1}{1-e}\right\}$

## تطبيق 14 حل متراجحات تشمل القيمة المطلقة

حل المتراجحات التالية :

أ) $Ln(|x-1|) + Ln|x+1| \le 0$ ، ب) $Ln|x+2| - Ln|x-1| + 1 > 0$

جـ) $Ln(|2x+5|) + Ln(|x|) \ge 2\,Ln(|x+1|)$

### الحل

أ) المجموعة المرجعية للمتراجحة (أ) هي $D = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$ المتراجحة (أ) تكتب على الشكل:

$Ln(|x-1||x+1|) \le Ln(1)$ ومنه ينتج $|(x-1)(x+1)| \le 1$ ... (1)

- إذا كان $x \in ]-1, 1[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2 \ge 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_1 = ]-1, 1[$

- إذا كان $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2 \le 2$

ومجموعة حلولها هي $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_2 = [-\sqrt{2}, -1[ \cup ]1, \sqrt{2}]$

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S = S_1 \cup S_2$

ب) المجموعة المرجعية للمتراجحة (ب) هي $D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

من أجل كل $x$ من $D$ المتراجحة (ب) تكتب على الشكل:

$Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) \ge Ln\left(e^{-1}\right)$ ومنه ينتج $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \ge e^{-1}$ ... (2)

- إذا كان $x \in ]-2, 1[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $-\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \ge e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x \geq \frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S_1 = \left[ \frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1} , 1 \right[$

- إذا كان $x \in ]-\infty , -2[ \cup ]1 , +\infty[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} \geq e^{-1}$

بالتبسيط نجد $\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)} \geq 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_2 = \left] -\infty , \frac{2e+1}{1-e} \right] \cup ]1 , +\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2e+1}{1-e}$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)}$ | | + | 0 | - | | - | | + | |

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = S_1 \cup S_2$

جـ) المجموعة المرجعية للمتراجحة (جـ) هي $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-5}{2} , 0 , -1 \right\}$

من اجل كل $x$ من $D$ المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل:

$$Ln(|2x+5|)|x| \geq Ln(|x+2|)^2$$

ومنه ينتج $|x(2x+5)| \geq (x+1)^2$ ....(3)

- إذا كان $x \in \left] \frac{-5}{2} , 0 \right[ - \{-1\}$ فإن (3) تكتب على الشكل $3x^2+7x+1 \leq 0$ و مجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_1 = [x_2 , x_1] - \{-1\}$ مع $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

- إذا كان $x \in \left] -\infty , \frac{-5}{2} \right[ \cup ]0 , +\infty[$ فإن (3) تكتب على الشكل $x^2+3x-1 \geq 0$

و مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S_2 = ]-\infty , x_4] \cup [x_3 , +\infty[$

حيث $x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ و $x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S = S_1 \cup S_2$

## تطبيق 15 حل معادلات و متراجحات

1) حل المعادلة $x^2+4x-5=0$ ..... (1)

2) لتكن $g(x)$ حيث $g(x) = (Ln\,x)^2 + Ln\,x - 5$

بوضع $X = Ln(x)$ ، حل المعادلة $g(x)=0$ ... (2)

3) حل المتراجحة $g(x) \geq 0$





### ✓ الحل

1) مميز المعادلة (1) هو $\Delta = 36$ ومنه المعادلة (1) لها حلان هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -5$

2) $g(x)=0$ يكافئ $X^2+4X-5=0$ يكافئ $(X=1)$ أو $(X=-5)$

$X=1$ يكافئ $Ln\,x = Ln\,e$ يكافئ $x=e$

$X=-5$ يكافئ $Ln\,x = Ln\,e^{-5}$ يكافئ $x=e^{-5}$

و منه مجموعة حلول المعادلة $g(x)=0$ هي $S = \{e , e^{-5}\}$

3) $g(x) = X^2+4X-5 = (X-1)(X+5) = (Ln(x)-1)(Ln(x)+5)$

| $x$ | $-\infty$ | | $e^{-5}$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Ln(x)-1$ | | - | | + | 0 | - | |
| $Ln(x)+5$ | | - | 0 | + | | + | |
| $g(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

$g(x) \geq 0$ يكافئ $x \in ]-\infty , e^{-5}] \cup [e , +\infty[$ و منه مجموعة حلول المتراجحة $g(x) \geq 0$ هي: $]-\infty , e^{-5}] \cup [e , +\infty[$ .

## تطبيق 16 حل معادلات و متراجحات

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ نضع $p(x) = 2x^3+3x^2+x-6$

1) أ) تحقق ان $p(1)=0$

ب) استنتج انه نستطيع كتابة $p(x) = (x-1)\varphi(x)$

و هذا من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ مع $\varphi(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

جـ) حل المتراجحة $p(x) \leq 0$

2) استعمل النتائج السابقة لحل المتراجحة

$2\,Ln\,x + Ln(2x+3) \leq Ln(6-x)$ ..... $(I)$

### ✓ الحل

1) أ) لدينا $p(1) = 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 + 1 - 6 = 6 - 6 = 0$

ب) بما ان 1 جذر لـ $p(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $\varphi(x)$ درجته 2

بحيث من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $p(x) = (x-1)\varphi(x)$ و $\varphi(x) = ax^2+bx+c$

بما ان معامل $x^3$ في $p(x)$ هو 2 فإن $a=2$

بعد نشر $(x-1)\varphi(x)$ و مطابقته مع $p(x)$ نجد $b=5$ و $c=6$

إذن $p(x) = (x-1)(2x^2+5x+6)$

جـ) لحل المتراجحة $p(x) \leq 0$ نعين إشارة $p(x)$

$p(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(2x^2+5x+6=0)$

مميز المعادلة $2x^2+5x+6=0$ يساوي $-23$

ومنه المعادلة $2x^2+5x+6=0$ ليس لها حلول و إشارة $(2x^2+5x+6)$ موجبة تماما.

$p(x) \leq 0$ إذا و فقط إذا كان $x \leq 1$

و منه مجموعة حلول المتراجحة $p(x) \leq 0$ هي $S=]-\infty\,,1]$

2) مجموعة تعريف المتراجحة $(I)$ هي $D=]0\,,6[$

من اجل كل $x^*$ من $D$ المتراجحة $(I)$ تكتب على الشكل:

$Ln(x^2)(2x+3) \leq Ln(6-x)$ و منه ينتج $2x^3+3x^2+x-6 \leq 0$ ..... $(II)$

مجموعة حلول المتراجحة $(II)$ هي $]-\infty,1]$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة $(I)$ هي:

$S'=]-\infty\,,1]\cap]0\,,6[=]0\,,1]$

## تطبيق 17 حل جملة معادلات

1) حل الجملة $(I)$ .... $\begin{cases}3x+5y=11\\ x-7y=-5\end{cases}$

2) استنتج حل الجملة $(II)$ ... $\begin{cases}3\,Ln\,x+5\,Ln\,y=11\\ Ln\,x-7Ln\,y=-5\end{cases}$

### ✓ الحل

1) $\begin{cases}3x+5y=11 & \ldots (1)\\ x-7y=-5 & \ldots (2)\end{cases}$ بضرب $(2)$ في $-3$ ثم نجمعها مع $(1)$ نجد $26\,y=26$

ومنه $y=1$ و بتعويض قيمة $y$ اي $(1)$ نجد $x=2$

إذن مجموعة حلول الجملة $(I)$ هي $S=\{(2,1)\}$

2) مجموعة تعريف الجملة $(II)$ هي مجموعة الثنائيات $(x,y)$ بحيث $x>0$ و $y>0$

بوضع $X=Ln\,x$ و $Y=Ln\,y$ الجملة $(II)$ تصبح كما يلي $\begin{cases}3X+5Y=11\\ X-7Y=-5\end{cases}$

من السؤال الأول نجد $X=2$ و $Y=1$

$X=2$ يكافئ $Ln\,x=2$ يكافئ $x=e^2$

$Y=1$ يكافئ $Ln\,y=1$ يكافئ $y=e$

ومنه مجموعة حلول الجملة $(II)$ هي $S_2=\{(e^2\,,e)\}$





## تطبيق 18 حل جملة معادلتين

1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية $\begin{cases}x\,y=4\\ (Ln\,x)^2+(Ln\,y)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2\end{cases}$ ..... $(I)$

2) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية :

$(II)$ ..... $\begin{cases}x+y=19\\ Ln\,x+Ln\,y=2\,Ln\,2+Ln\,15\end{cases}$

### ✓ الحل

1) مجموعة التعريف الجملة $(I)$ هي مجموعة الثنائيات $(x,y)$ بحيث $x>0$ و $y>0$ .

$$(I) \ldots \begin{cases}x\,y=4 & \ldots (1)\\ (Ln\,x)^2+(Ln\,y)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2 & \ldots (2)\end{cases}$$

من $(1)$ نجد $y=\frac{4}{x}$ نعوضه في $(2)$ نجد $(Ln\,x)^2+\left(Ln\frac{4}{x}\right)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2$

بعد التبسيط نجد $(*)$ .... $2(Ln\,x)^2-(4\,Ln\,2)\times(Ln\,x)+\frac{3}{2}(Ln\,2)^2=0$

بوضع $Ln(x)=X$ في $(*)$ نجد $(**)$ ... $2X^2-(4\,Ln\,2)X+\frac{3}{2}(Ln\,2)^2=0$

مميز المعادلة $(**)$ هو $\Delta=(2\,Ln\,2)^2$

إذن المعادلة $(**)$ لها حلان هما $X_1=\frac{3}{2}\,Ln\,2=Ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right)$ و $X_2=\frac{1}{2}Ln\,2=Ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$

$Ln\,x=X_1$ يكافئ $x=e^{X_1}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

$Ln\,x=X_2$ يكافئ $x=e^{X_2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

لما $x=2\sqrt{2}$ فإن $y=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

لما $x=\sqrt{2}$ فإن $y=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

و منه مجموعة حلول الجملة $(I)$ هي $S=\{(\sqrt{2}\,,2\sqrt{2}),(2\sqrt{2}\,,\sqrt{2})\}$

2) $(II)$ .... $\begin{cases}x+y=19 & \ldots. (3)\\ Ln\,x+Ln\,y=2\,Ln\,2+Ln\,15 & \ldots.. (4)\end{cases}$

مجموعة تعريف الجملة $(II)$ هي $D=(\mathbb{R}_+^*)^2$

من $(3)$ نجد $y=19-x$ نعوض $y$ في $(4)$ نجد $Ln\,x+Ln(19-x)=Ln\,4+Ln\,15$

وحسب قواعد جداء اللوغاريتمات نجد $Ln(-x^2+19x)=Ln\,60$

ومنه ينتج $-x^2+19x-60 = 0$ .... $(\alpha)$

مميز المعادلة $(\alpha)$ هو $\Delta = 121$ ومنه المعادلة $(\alpha)$ لها حلان هما $x_1 = 4$ ، $x_2 = 15$

لما $x=4$ فإن $y=19-4=15$ ولما $x=15$ فإن $y=19-15=4$

ومنه مجموعة حلول الجملة $(II)$ هي $S'=\{(4\ ,\ 15)\ ,\ (15\ ,\ 4)\}$

## تطبيق 19 — تحدب الدالة $Ln$

إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على $I$ و بحيث من أجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ من $I$ $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$ نقول عن $f$ أنها محدبة.

1) أ) بين أنه من أجل كل $a>0$ و $b>0$ يكون $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ب) استنتج أنه من أجل كل $a>0$ و $b>0$ يكون

$$Ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$$

2) أنشئ التمثيل البياني $(C_f)$ للدالة $x \mapsto Ln\,x$ مميزا عليه نقطتين $A$ و $B$ فاصلتيهما $a$ و $b$ على التوالي.

ما هي وضعية منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى $(C_f)$ ؟

### ✓ الحل

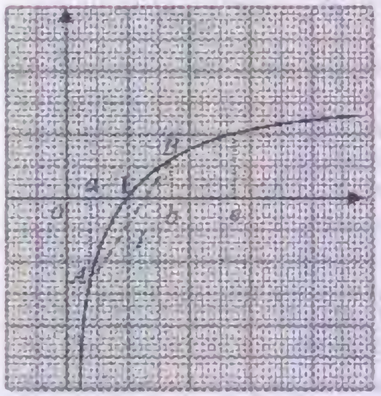
1) أ) نعلم أن $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ و عليه يكون $a^2+b^2-2ab \geq 0$

بإضافة $4ab$ إلى طرفي المتباينة نجد $a^2+b^2+2ab \geq 4ab$

و بقسمة الطرفين على 4 نجد $\frac{a^2+b^2+2ab}{4} \geq ab$ ،

و بجذر الطرفين نجد $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab}}{2} \geq \sqrt{ab}$

أي : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$



ب) لدينا $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ و بما أن الدالة $Ln$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

فإن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq Ln\sqrt{ab}$ و لكن ،

$$Ln\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}Ln(ab)=\frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$$

إذن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$





2) إحداثيتا النقطة $I$ منتصف $[AB]$ هي $\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ \frac{Ln\,a+Ln\,b}{2}\right)$

بما أن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{Ln\,a+Ln\,b}{2}$

فإن النقطة $M\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ من $(C_f)$ تقع فوق النقطة $I$

وهذا يعني أن الدالة $Ln$ محدبة.

## تطبيق 20 — حساب النهايات

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة $f$ في المكان المعطى.

أ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x}$ ، $x=0$ ؛ ب) $f(x)=\frac{x+Ln\,x}{x}$ ، $x=0$

جـ) $f(x)=\frac{1}{x}-Ln\,x$ ، $x=0$ ؛ د) $f(x)=\frac{x}{Ln\,x}$ عند $(+\infty)$

هـ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x+1}$ عند $(+\infty)$ ؛ و) $f(x)=\frac{Ln(x+1)}{x}$ عند $+\infty$

ن) $f(x)=2x+x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$

### ✓ الحل

أ) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\times Ln\,x=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0} Ln\,x=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{Ln\,x}{x}\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}\frac{Ln\,x}{x}=-\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0} -Ln\,x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=+\infty$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{Ln\,x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)}=+\infty$

هـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}\times\frac{x}{x+1}=0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$

و) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln(x+1)}{x+1}\times\dfrac{x+1}{x}=0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln(x+1)}{x+1}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$

ن) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+x\,Ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{X}Ln(1+X)=+\infty$

لأن $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{2}{X}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{Ln(1+X)}{X}=1$

( $X=\dfrac{1}{x}$ ولما $x$ يؤول إلى $+\infty$ فإن $X\to0$ ).



## تطبيق 21 حساب النهايات

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة $f$ عند أطراف المجال $I$

أ) $f(x)=x(2-Ln\,x)$ ، $I=]0,+\infty[$

ب) $f(x)=Ln\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)$ ، $I=]-\infty,-3[$

جـ) $f(x)=\dfrac{x+2}{Ln\,x}$ ، $I=]1,+\infty[$

د) $f(x)=Ln(x+1)-Ln\,x$ ، $I=]0,+\infty[$

هـ) $f(x)=\dfrac{x+1}{1-Ln\,x}$ ، $I=]e,+\infty[$

✓ الحل

أ) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[2x-x\,Ln(x)\right]=0$

لأن $\lim\limits_{x\to0} x\,Ln\,x=\bar{0}$ و $\lim\limits_{x\to0}2x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-Ln\,x)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=Ln(1)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x-2}=1$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{x-2}=0^+$





جـ) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1}Ln(x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\dfrac{Ln\,x}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{\dfrac{Ln\,x}{x}}=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln\,x}{x}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1$

د) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}-Ln\,x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}Ln(x+1)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}Ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=Ln(1)=0$

هـ) $\lim\limits_{x\to e} f(x)=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x+1}{1-Ln\,x}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to e}(1-Ln\,x)=\bar{0}$ و $\lim\limits_{x\to e}(x+1)=e+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{1-Ln\,x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{Ln(x)\left(\dfrac{1}{Ln\,x}-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{Ln\,x}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{Ln\,x}-1}=-\infty$

## تطبيق 22 حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

عين في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة $f$ في المكان المعطى.

أ) $f(x)=\dfrac{Ln\,x}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x)=x\,Ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

جـ) $f(x)=\dfrac{x+1+Ln(x+2)}{x+1}$ عند $-1$ ، د) $f(x)=\dfrac{Ln(x)-1}{x^2-1}$ عند 1

✓ الحل

أ) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\dfrac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=Ln\,x$ تكون $f(x)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند 1

و لدينا $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

من أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ لدينا $g'(x)=\frac{1}{x}$ ومنه $g'(1)=1$ إذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)= +\infty\times 0$ حالة عدم التعيين

بوضع $X=\frac{1}{x}$ تكون $f(x)=\frac{Ln(1+X)}{X}$ و لما $x\to+\infty$ فإن $X\to 0$

بوضع $g(X)=Ln(1+X)$ تصبح $\frac{Ln(1+X)}{X}=\frac{g(X)-g(0)}{X-0}$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند $0$ و لدينا $\lim\limits_{X\to 0}\frac{g(X)-g(0)}{X-0}=g'(0)$

و لكون $g'(X)=\frac{1}{X+1}$ نجد $g'(0)=1$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} \frac{Ln(1+X)}{X} = g'(0) = 1$

جـ) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=x+1+Ln(x+2)$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند $-1$.

إذن $\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=g'(-1)$.

من أجل كل $x$ من $]-2,+\infty[$ لدينا $g'(x)=1+\frac{1}{x+2}$

ومنه $g'(-1)=2$ إذن $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = 2$

د) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=Ln(x)-1$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{1}{x}$

ومنه $g'(1)=1$ إذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$ لأن $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=1$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

## تطبيق 23 المستقيم المقارب المائل ووضعيته بالنسبة لمنحني

$f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+3-\frac{Ln\,x}{x}$

1) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل لـ $(C_f)$.

2) ادرس الوضعية النسبية لـ $(C_f)$ بالنسبة $(\Delta)$.





✓ الحل

1) حتى يكون $(\Delta)$ مستقيما مقاربا مائلا لـ $(C_f)$ يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-(x+3)]=0$

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim_{x\to +\infty}\frac{-Ln\,x}{x}=0$$

إذن $y=x+3$ ؛ $(\Delta)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$

2) لدراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ ندرس إشارة $d(x)$ حيث $d(x)=f(x)-(x+3)$.

$$d(x)=f(x)-(x+3)=\frac{-Ln(x)}{x}$$

$d(x)=0$ يكافئ $Ln(x)=0$ يكافئ $x=1$

إذا كان $x>1$ فإن $d(x)<0$ ومنه $(\Delta)$ يقع فوق $(C_f)$

وإذا كان $0<x<1$ فإن $d(x)>0$ ومنه $(\Delta)$ يقع تحت $(C_f)$

$(\Delta)$ يقطع $(C_f)$ في النقطة $A(1,4)$.

## تطبيق 24 دراسة قابلية الاشتقاق

1) $f$ دالة معرفة على $I=[-1,+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)^2\,[1-Ln(x+1)] & ,\ x>-1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x=-1$

2) $g$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{Ln\,x}{x-1}$

إذا كان $x\neq 1$ و $g(1)=0$ ادرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند $1$.

✓ الحل

1) حتى تقبل الدالة $f$ الاشتقاق عند $x=-1$ يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\ell$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+1)[1-Ln(x+1)]$$

$$=\lim_{x\to -1}[(x+1)-(x+1)Ln(x+1)]=0=\ell$$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق عند العدد $-1$.

2) حتى تقبل الدالة $g$ الاشتقاق عند $1$ يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\ell$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}=1\times(\infty)=\infty$$

ومنه الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

## تطبيق 25 مشتق الدالة المركبة

في كل حالة من الحالات التالية تحقق أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من $I$ ثم أحسب $f'(x)$ .

أ) $f(x)=Ln\left(2+x^2\right)$ ، $I=\mathbb{R}$

ب) $f(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ، $I=]1,+\infty[$

جـ) $f(x)=x-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ، $I=]0,+\infty[$

د) $f(x)=Ln(Ln\,x)$ ، $I=]1,+\infty[$

### ✓ الحل

أ) الدالة $x\xrightarrow{u}2+x^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x)>0$ ومنه الدالة $f=Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{2x}{2+x^2}$

ب) الدالة $u:x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و $]1,+\infty[\subset D_u$

ومن أجل كل $x$ من $]1,+\infty[$ يكون $u(x)>0$ .

إذن الدالة $f=Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

ولدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}$

جـ) الدالة $u$ ، $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ يكون $u(x)>0$ ومنه الدالة $Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا $(Ln\,o\,u)'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}$

- الدالة $x\xrightarrow{h}-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وهما $x\mapsto -x$ و $x\mapsto Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$





هما $x\mapsto f_1(x)$ و $x\mapsto x$ ومن أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ لدينا ،

$$f'(x)=1-\left[Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(x+1)}\times x\right]=1-Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+1}$$

د) الدالة $x\xrightarrow{u}Ln\,x$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ .

و من أجل كل $x$ من $]1,+\infty[$ لدينا $u(x)>0$

ومنه الدالة $f=Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

و لدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{1}{x}\times\frac{1}{Ln\,x}=\frac{1}{x\,Ln\,x}$

## تطبيق 26 حل معادلات و متراجحات

في كل حالة من الحالات التالية حل المتراجحات والمعادلات ذات المجهول $x$ .

أ) $2^x\le 100$ ، $x$ عدد طبيعي ، ب) $4^x=10000$ ، $x$ عدد حقيقي

جـ) $(0,25)^x=1$ ، $x$ عدد حقيقي ، د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\le 0,2$ ، $x$ عدد حقيقي

### ✓ الحل

أ) $2^x\le 100$ يكافئ $Ln\left(2^x\right)\le Ln(100)$

يكافئ $x\,Ln(2)\le Ln(100)$

يكافئ $x\le\frac{Ln(100)}{Ln(2)}$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $\{0,1,\dots,66\}$

ب) $4^x=10000$ يكافئ $x\,Ln(4)=Ln(10000)$ يكافئ $x=\frac{Ln(10000)}{Ln(4)}$

جـ) $(0,25)^x=1$ يكافئ $x\,Ln(0,25)=0$ يكافئ $x=0$

د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\le 0,2$ يكافئ $x\,Ln\left(\frac{2}{3}\right)\le Ln(0,2)$

يكافئ $x\ge\frac{Ln(0,2)}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $\left]\frac{Ln(0,2)}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)},+\infty\right[$

## تطبيق 27 حصر أعداد بواسطة قوة العدد 10

إذا علمت أن $Log\ a = 4,42$ و $Log\ b = 3,68$ أعط حصرا للعددين $a$ و $b$ بواسطة قوى للعدد 10 ثم حصرا للأعداد $a\ b$ ، $\frac{a}{b}$ ، $a^2$ ، $a^3$

✓ الحل

- من المتباينة $5 > Log\ a \geq 4$ ينتج $10^5 > a \geq 10^4$

من المتباينة $4 > Log\ b \geq 3$ ينتج $10^4 > b \geq 10^3$

- لدينا $Log\ a - Log\ b = 0,74$ أي $Log\ \frac{a}{b} = 0,74$

و بما أن $1 > Log\ \frac{a}{b} \geq 0$ فإن $10^1 > \frac{a}{b} \geq 10^0$

- لدينا $Log\ a^2 = 2\ Log\ a = 8,84$ إذن $9 > Log\ a^2 \geq 8$ و عليه $10^9 > a^2 \geq 10^8$

- لدينا $Log\ (a\ b) = Log\ a + Log\ b = 8,10$ إذن $9 > Log\ (a\ b) \geq 8$

و عليه يكون $10^9 > a\ b \geq 10^8$

- لدينا $Log\ a^3 = 3\ Log\ a = 13,26$ إذن $14 > Log\ a^3 \geq 13$ وعليه يكون $10^{14} > a^3 \geq 10^{13}$

## تطبيق 28 الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس $a$

ليكن $a$ عددا حقيقيا موجبا تماما و يختلف عن 1 و لتكن $g$ دالة معرفة من أجل $x > 0$ بالعبارة $g(x) = \frac{Ln\ x}{Ln\ a}$

1) احسب $g(a)$ ثم بين أن $g(b \times c) = g(b) + g(c)$

2) عين اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها حسب قيم $a$.

3) ليكن $(\gamma_a)$ المنحنى البياني للدالة $g$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ارسم $(\gamma_e)$ ، $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ ، $(\gamma_2)$ في نفس المعلم

✓ الحل

1) $g(a) = \frac{Ln\ a}{Ln\ a} = 1$

$$g(b \times c) = \frac{Ln(b \times c)}{Ln\ a} = \frac{Ln\ b + Ln\ c}{Ln\ a} = \frac{Ln\ b}{Ln\ a} + \frac{Ln\ c}{Ln\ a} = g(b) + g(c)$$





إذن كل الخواص المتعلقة بالدالة $Ln$ تبقى صحيحة بالنسبة إلى الدالة $g$.

2) الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0\ ,\ +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x\ Ln\ a}$

حالة $a > 1$

- إذا كان $a > 1$ فإن $Ln\ a > 0$ ومنه من أجل كل $x$ من $]0\ ,+\infty[$ يكون $g'(x) > 0$

و بالتالي الدالة $g$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | | $+$ |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ | $\nearrow\ +\infty$ |

- حالة $1 > a > 0$

- الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $g'(x) = \frac{1}{x\ Ln(a)}$

بما أن $Ln\ a < 0$ فإنه من أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ يكون $g'(x) < 0$

وبالتالي الدالة $g$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

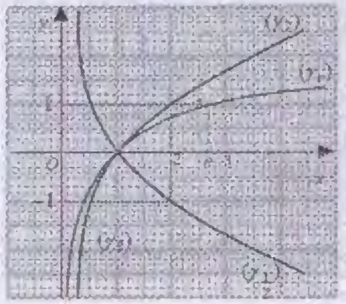
- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | | $-$ |
| تغيرات $g$ | $+\infty$ | $\searrow\ -\infty$ |

3) $(\gamma_e)$ له مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

$(\gamma_e)$ يقطع $(x'x)$ في النقطة $(1,0)$ و يمر أيضا من النقطة $(e,1)$.




- $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ يمر من النقطة $(1,0)$ والنقطة $(2,-1)$.

و له مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

- $(\gamma_2)$ يمر من النقطتين $(1,0)$ و $(2\ ,\ 1)$

$(\gamma_{\frac{1}{2}})$ هو نظير $(\gamma_2)$ بالنسبة إلى محور الفواصل

وبصفة عامة $(\gamma_{\frac{1}{a}})$ نظير $(\gamma_a)$ بالنسبة إلى محور الفواصل.

## تطبيق 29 رسم التمثيل البياني لدالة

$f$ دالة معرفة على المجال $]-1,1[$ بالعبارة $f(x) = Ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

1) بين أن الدالة $f$ فردية.

2) بين ان الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$
3) ادرس تغيرات الدالة $f$ على $[0,1[$ ثم ارسم منحناها.

### الحل ✓

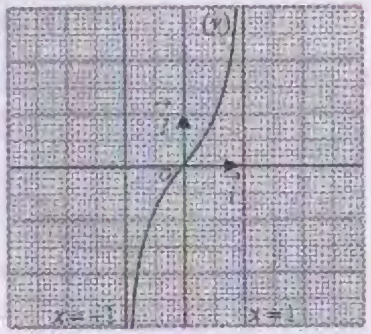
1) $f$ دالة فردية إذا وفقط إذا كان من اجل كل $x$ من $]-1,1[$
فإن $-x$ من $]-1,1[$ و $f(-x)=-f(x)$
إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $-x\in]-1,1[$
و $f(-x)=Ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)=Ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{1-x}}\right)=-Ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=-f(x)$ ومنه $f$ فردية.

2) الدالة $u: x\mapsto \frac{x+1}{1-x}$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ و لدينا $u(x)>0$
ومنه الدالة $f=Ln\,ou$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

3) دراسة تغيرات $f$ على $[0,1[$
$f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$
- الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ و لدينا $f'(x)=\frac{2}{(1+x)(1-x)}$
من اجل كل $x$ من $[0,1[$ يكون $f'(x)>0$ منه الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0,1[$

بما ان الدالة $f$ فردية نرسم بيانها على المجال $[0,1[$ ونتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المبدا $O(0,0)$
$x=1$ معادلة مستقيم مقارب يوازي $(y'y)$

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |




## تطبيق 30 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

1) $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x)-x$
أ) ادرس تغيرات الدالة $f$.
ب) أحسب $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$.





2) أ) باستعمال السؤال 1) ادرس تغيرات الدالة $g$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=(Ln\,x)^2-2x$
ب) ارسم $(\gamma)$ بيان الدالة $g$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

### الحل ✓

1) أ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ عدم التعيين
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{Ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$
الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$
$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↘ $-\infty$ |

- إذا كان $x>1$ فإن $f'(x)<0$ و منه $f$ متناقصة تماما على $]1,+\infty[$
- إذا كان $0<x<1$ فإن $f'(x)>0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $]0,1]$

ب) من جدول تغيرات $f$ نستنتج انه من اجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ يكون $f(x)\le 0$.

2) أ) دراسة تغيرات $g$ :
الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{2}{x}Ln\,x-2$
ومنه $g'(x)=\frac{2}{x}\left(Ln(x)-x\right)$ اي $g'(x)=\frac{2}{x}\times f(x)$
$g'(x)=0$ يكافئ $f(x)=0$ يكافئ $x=1$
من اجل كل $x$ من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ يكون $g'(x)<0$
اذن $g'(x)$ سالب و ينعدم عند $x=1$ منه الدالة $g$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty-\infty$ عدم التعيين.

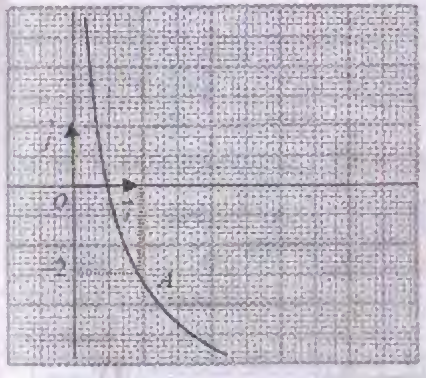
| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| تغيرات $g$ | $+\infty$ ↘ | | $-\infty$ |

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\left(Ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2-2\left(\sqrt{x}\right)^2$
$=\lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(Ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2-2\left(\sqrt{x}\right)^2$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2\left[\frac{2\left(Ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}-1\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2\left[2\left(\frac{Ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2-1\right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{Ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}2\left(\sqrt{x}\right)^2=+\infty$




ب) للمستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-2$

و $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+2x\right)=+\infty$

إذن المنحني $(C_f)$ ليس له مستقيم مقارب مائل.

- بما أن $g'(x)$ ينعدم عند $x=1$ و لا يغير إشارته في جوار 1 فإن النقطة $A(1,-2)$ نقطة إنعطاف لـ $(C_g)$ و المماس عندها يخترق المنحنى $(C_g)$

## تطبيق 31 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

$f$ دالة معرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ بالعبارة التالية:

$$f(x)=x-2+2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) ادرس تغيرات الدالة $f$.

2) أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(\gamma)$ الممثل للدالة $f$.

ب) ادرس وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ ثم ارسم بالتدقيق $(\gamma)$ و $(\Delta)$ في نفس المعلم.

### الحل

1) $\lim_{x\to 1^{>}} f(x)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to 1^{>}} Ln\frac{x}{x-1}=+\infty$ و $\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$





$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

اتجاه تغير $f$:

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x^2-x-2=0$ يكافئ $(x=-1)$ أو $(x=2)$

$x=-1$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $I$ و بالتالي $f'(2)=0$

إشارة $f'(x)$ على $I$ هي نفس إشارة $\left(x^2-x-2\right)$

- إذا كان $x\in]1,2[$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي $f$ متناقصة تماما على $]1,2[$
- إذا كان $x\in]2,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ و بالتالي $f$ متزايدة تماما على $[2,+\infty[$

$f(2)=2Ln(2)$

$f(2)\approx 1,38$

| $x$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| تغيرات $f$ | $+\infty$ ↘ | $f(2)$ | ↗ $+\infty$ |

2) أ) $y=x-2$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(\gamma)$ إذا و فقط إذا كان:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-2+2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x+2\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$

ب) لدراسة وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x-2)$ على $I$.

$f(x)-(x-2)=2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

من أجل كل $x\in I$ يكون $x>x-1$

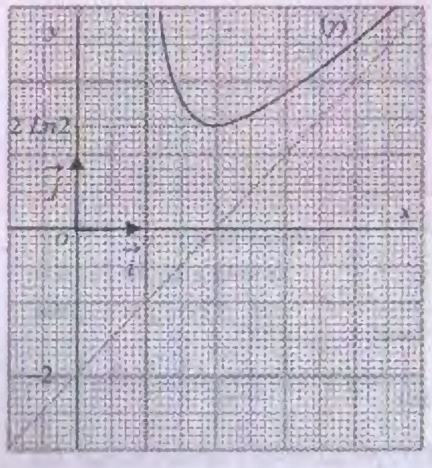
بالقلب نجد $\frac{x}{x-1}>1$ و منه ينتج

$Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>Ln(1)$

أي $Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>0$

إذن $f(x)-(x-2)>0$

و هذا يعني أن المنحني $(\gamma)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$



## تطبيق 31 — دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

$f$ دالة معرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ بالعبارة التالية:

$$f(x)=x-2+2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) ادرس تغيرات الدالة $f$

2) أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(\gamma)$ الممثل للدالة $f$

ب) ادرس وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ ثم ارسم $(\gamma)$ و $(\Delta)$ في نفس المعلم.

### ✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 1^{>}} Ln\frac{x}{x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^{>}}(x-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

اتجاه تغير $f$:

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x^2-x-2=0$ يكافئ $(x=-1)$ او $(x=2)$

$x=-1$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $I$ و بالتالي $f'(2)=0$

إشارة $f'(x)$ على $I$ هي نفس إشارة $(x^2-x-2)$

- إذا كان $x\in]1,2[$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي $f$ متناقصة تماما على $]1,2[$
- إذا كان $x\in]2,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ و بالتالي $f$ متزايدة تماما على $]2,+\infty[$.

$f(2)=2Ln(2)$

$f(2)\approx 1,38$

| $x$ | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |
| تغيرات $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(2)$ | ↗ | $+\infty$ |

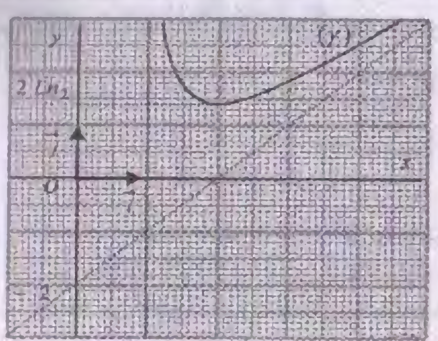
2) أ) $y=x-2$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(\gamma)$ إذا و فقط إذا كان: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-2+2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x+2\right]=\lim_{x\to+\infty}2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$

ب) لدراسة وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x-2)$ على $I$.








$$f(x)-(x-2)=2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل $x\in I$ يكون $x>x-1$

بالقلب نجد $\frac{x}{x-1}>1$ و منه ينتج

$Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>Ln(1)$ أي $Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>0$

إذن $f(x)-(x-2)>0$

و هذا يعني أن المنحني $(\gamma)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$

## تطبيق 32 — دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد

$f$ دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $f(0)=1$ و من أجل $x>0$:

$$f(x)=\frac{Ln(1+x)}{x}$$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ:

$$g(x)=Ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$$

ب) أحسب $g(0)$ ثم استنتج أن من أجل كل $x$ من $[0,+\infty[$ يكون:

$$Ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

جـ) بطريقة مماثلة بين أنه إذا كان $x\ge 0$ فإن $Ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}$

د) تحقق أن من أجل كل $x>0$ يكون $-\frac{1}{2}\le\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\le\frac{-1}{2}+\frac{x}{3}$

هـ) استنتج أن $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر و أن $f'(0)=\frac{-1}{2}$

### ✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=\frac{0}{0}$ عدم التعيين.

بوضع $\kappa(x)=Ln(1+x)$ نجد $\kappa(0)=0$ و منه $\frac{Ln(1+x)}{x}=\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}$

الدالة $\kappa$ قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند الصفر

ومنه $\lim_{x\to0}\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}=\kappa'(0)$ لكن $\kappa'(x)=\frac{1}{1+x}$ إذن $\kappa'(0)=1$

وعليه $\lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}=1$ مما يفسران $f$ مستمرة من اليمين عند 0.

2) أ) $g$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\left(1-x+x^2\right)=\frac{-x^3}{x+1}$

بما أن $x\ge0$ فإن $g'(x)\le0$ وبالتالي الدالة $g$ متناقصة تماما على $[0,+\infty[$.

ب) بما أن $g(0)=0$ و $g$ متناقصة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه من أجل كل $x\in[0,+\infty[$ يكون $g(x)\le0$

وهذا يعني أن $Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]\le0$ أي $Ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

جـ) نضع $d(x)=Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}\right]$

ندرس اتجاه تغير $d$ على $I=[0,+\infty[$

الدالة $d$ قابلة للاشتقاق على $I$

و أنه من أجل كل $x$ من $I$ لدينا $d'(x)=\frac{x^2}{1+x}$

بما أن $x\ge0$ فإن $\frac{x^2}{x+1}\ge0$

وهذا يعني أن $d'(x)\ge0$ إذن فإن الدالة $d$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

بما أن $d(0)=0$ و $d$ متزايدة تماما على $I$

فإنه من أجل كل $x\ge0$ لدينا $d(x)\ge0$

أي $Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}\right]\ge0$ وهذا يعني أن $Ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}$

د) من السؤالين (ب) و (جـ) نجد $x-\frac{x^2}{2}\le Ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

بإضافة $-x$ نجد $-\frac{x^2}{2}\le Ln(1+x)-x\le-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

وبالقسمة على $x^2$ نجد $-\frac{1}{2}\le\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

هـ) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{Ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}$

بما أن $-\frac{1}{2}\le\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ و $\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

فإنه حسب نظرية الحصر نستنتج $\lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$







وبالتالي $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$

إذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر و $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

## تطبيق 33 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

$f$ دالة معرفة على المجال $]3,+\infty[$ بـ $f(x)=(x+1)Ln(x-3)$

و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي 1cm)

1) تحقق أنه من أجل $x>3$ يكون $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+Ln(x-3)$

2) أحسب $f''(x)$ حيث $f''$ المشتق الثاني للدالة $f$ ثم استنتج اتجاه تغير $f'$.

3) عين إشارة $f'(x)$ على المجال $]3,+\infty[$.

4) أ) ادرس نهاية $f$ عند أطراف المجال $]3,+\infty[$ ثم حدد المستقيمات المقاربة لـ $(\gamma)$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة $f$

5) عين نقط تقاطع $(\gamma)$ مع $(xx')$ ثم ارسم $(\gamma)$.

### الحل

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]3,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+Ln(x-3)$

2) الدالة $f'$ قابلة للاشتقاق على $]3,+\infty[$ و لدينا $f''(x)=\frac{x-7}{(x-3)^2}$

$f''(x)=0$ تكافئ $x=7$

إذا كان $x>7$ فإن $f''(x)>0$ بالتالي $f'$ متزايدة تماما على $]7,+\infty[$.

إذا كان $3<x<7$ فإن $f''(x)<0$ و بالتالي $f'$ متناقصة تماما على $]3,7]$.

3) بما أن $f''(x)$ موجبة على $]7,+\infty[$ و سالبة على $]3,7[$ و $f''(7)=0$ فإن الدالة $f'$ لها قيمة حدية صغرى هي $f'(7)$ على المجال $]3,+\infty[$.

بالتالي من أجل كل $x\in]3,+\infty[$ يكون $f'(x)\ge f'(7)$

و بما أن $f'(7)=\frac{8}{2}+2Ln(2)$ أي $f'(7)>0$ فإن $f'(x)>0$

4) أ) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}Ln(x-3)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}Ln(x-3)=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}Ln(x-3)=+\infty$

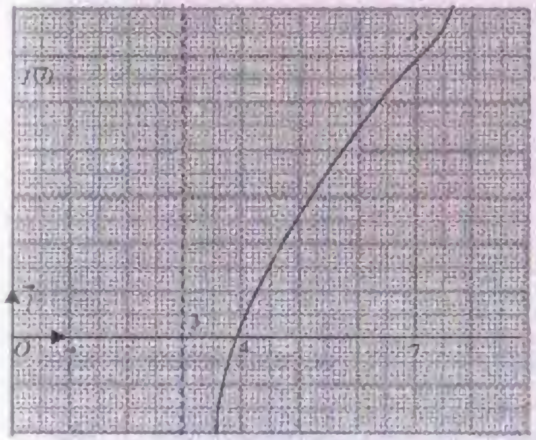
إذن المنحني $(\gamma)$ ليس له مستقيم مقارب في جوار $(+\infty)$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to3}Ln(x-3)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to3}(x+1)=4$

إذن $(\gamma)$ له مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=3$

ب) بما أن $f'(x)$ موجبة تماما على $]3,+\infty[$ فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على $]3,+\infty[$

| $x$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | $+$ |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ | $+\infty$ |




5) فاصلة نقطة التقاطع المنحني $(\gamma)$ مع $(xx')$ هي حل المعادلة $f(x)=0$ .

$f(x)=0$ يكافئ $(x+1)=0$

أو $Ln(x-3)=0$ و $x>3$

يكافئ $(x=-1)$ أو $(x-3=1)$ و $x>3$

يكافئ $(x=-1)$ أو $(x=4)$ و $x>3$

إذن $f(x)=0$ يكافئ $(x=4)$ .

و عليه $(\gamma)$ يقطع $(xx')$ في النقطة $(4,0)$

بما أن $f''(x)$ ينعدم عند 7 مغيرا إشارته في جوار 7 فإن النقطة $A(7,f(7))$ نقطة انعطاف للمنحني $(\gamma)$

$f(7)=8\,Ln(4)=16\,Ln(2)$

## تطبيق 34 دراسة دالة و حل المعادلات

**I) نعتبر** $g$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4\,Ln\,x$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ .

2) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

**II) $f$ دالة معرفة** على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-(Ln\,x)^2$

1) بين أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) عين نهاية الدالة $f$ عند $(+\infty)$ و عند الصفر .





3) باستعمال الفرع 1) ادرس تغيرات الدالة $f$ . ثم ارسم $(\gamma)$ المنحنى البياني للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة 5 cm ).

III) 1) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0,1[$ .

2) بين أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{x}$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ على المجال $]1,+\infty[$ .

3) أ) بين أن $\alpha\beta=1$

ب) عين حصرا لـ $\beta$ بتقريب $0,001$ ثم استنتج حصرا لـ $\alpha$ .

## ✓ الحل

I) 1) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left[x^4-1-4x(x\,Ln\,x)\right]=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to0}xLn(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[1-\frac{1}{x^4}-4\frac{Ln\,x}{x^2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[1-\frac{1}{x^4}-4\frac{Ln\,x}{x}\times\frac{1}{x}\right]=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$

اتجاه تغير $g$ :

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{2(x^2-1)^2}{x^3}$

$g'(x)=0$ يكافئ $x=1$ أو $x=-1$

بما أن $x>0$ فإن للمعادلة $g'(x)=0$ حلا وحيدا $x=1$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

من أجل كل $x>0$ و $x\neq1$ لدينا $g'(x)>0$ وبالتالي الدالة $g$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

2) $g(1)=0$

إذا كان $x>1$ فإن $g(x)>0$ وإذا كان $0<x<1$ فإن $g(x)<0$

II) 1) من أجل كل $x>0$ لدينا :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{4}+\frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\left(Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2=\frac{1}{4x^2}+\frac{x^2}{4}-(-Ln\,x)^2$$

$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (Ln\,x)^2 = f(x)$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left( \frac{Ln\,x}{x} \right)^2 \right] = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} - (x\,Ln\,x)^2 \right] = +\infty$$

3) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0 , +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$

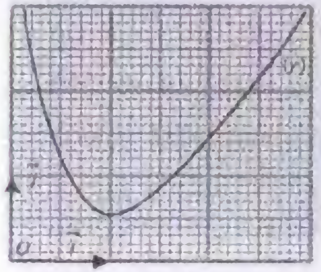
$f'(x)=0$ يكافىء $x=1$

- بما أن من أجل كل $x \rangle 1$ يكون $g(x) \rangle 0$ فإن $f'(x) \rangle 0$

- و إذا كان $0 \langle x \langle 1$ فإن $g(x) \langle 0$ و منه $f'(x) \langle 0$

إذن $f$ متزايدة تماما على $]1, +\infty[$ و متناقصة تمام على $]0,1[$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(1)$ | ↗ | $+\infty$ |




III) 1) نضع $h(x) = f(x) - x$

الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $]0 , 1[$

و لدينا $h'(x) = f'(x) - 1$

- بما أن $f'(x) \langle 0$ على المجال $]0 , 1[$

فإن $h'(x) \langle 0$ على $]0,1[$ و $h(]0,1[) = \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$

- بما أن $0 \in \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$ فإن للمعادلة $h(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha \in ]0,1[$

بما أن $h(\alpha)=0$ فإن $f(\alpha)=\alpha$

2) نضع $k(x) = f(x) - \frac{1}{x}$

الدالة $k$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ و لدينا $k'(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2}$

بما أن $f'(x) \rangle 0$ على المجال $]1 , +\infty[$ فإن $k'(x) \rangle 0$

بما أن $k(]1,+\infty[) = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ و $0 \in \left]\frac{-1}{2} , +\infty\right[$

فإن للمعادلة $k(x)=0$ حلا وحيدا $\beta$ من $]1 , +\infty[$ أي $f(\beta) = \frac{1}{\beta}$





3) أ) لدينا $f(\alpha) = \alpha$ و $f(\beta) = \frac{1}{\beta}$

بما أن $\beta \rangle 1$ فإن $\frac{1}{\beta} \langle 1$

لدينا $f(\beta) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$

إذن $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$ و $f(\alpha) = \alpha$

وبما أن للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا

فإن $\frac{1}{\beta} = \alpha$ أي $\alpha\beta = 1$

ب) نستعمل طريقة المسح لتحديد المجال $]a , b[$ الذي ينتمي اليه $\beta$ في المرحلة الأولى ،
ثم نستعمل طريقة ديكتومي لتحديد حصر ادق .

| $x$ | $K(x)$ |
|---|---|
| 1 | $-0,5$ |
| 2 | $0,08204$ |
| الخطوة $p=1$ | |

من الجدول المجاور نستنتج أن $\beta \in ]1,2[$

$k\left(\frac{3}{2}\right) = -0,15080 \langle 0$

$k(1,75) = -0,027243 \langle 0$

$k(1,875) = 0,10916 \rangle 0$ إذن $\beta \in ]1,750 , 1,875[$

- بما أن $\beta \in ]1,750 , 1,875[$ و الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متناقصة على المجال $]1,750 , 1,875[$

فإن $\frac{1}{\beta} \in \left]\frac{1}{1,875} , \frac{1}{1,750}\right[$ أي $\alpha \in \left]\frac{1}{1,875} , \frac{1}{1,750}\right[$

ومنه $\alpha \in ]0,533 , 0,571[$

## تطبيق 36 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0,1\}$ بالعبارة $f(x) = -\frac{x}{2} + Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ فإن ،

$$\frac{1}{2}\left[f(x) + f(1-x)\right] = -\frac{1}{4}$$

ب) استنتج أن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحني $(\gamma)$.

2) ادرس تغيرات الدالة $f$ على المجالين $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ و $]1, +\infty[$

3) ا) بين ان المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$

ثم حدد الوضع النسبي للمنحني $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

ب) ارسم $(\gamma)$ و $(\Delta)$ في نفس المعلم.

✓ **الحل**

1) ا) من اجل كل $x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$ ،

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(1-x)] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \left(\frac{1-x}{2}\right) + Ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + Ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x} \times \frac{x}{x-1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln|1|\right] = -\frac{1}{4}$$

ب) لدينا $\frac{1}{2}[f(x)+f(1-x)] = -\frac{1}{4}$ .... (*)

$A(a,b)$ مركز تناظر لـ $(\gamma)$ إذا وفقط إذا كان $f(2a-x)=2b-f(x)$

اي $\frac{1}{2}[f(x)+f(2a-x)]=b$

من العلاقة (*) نستنتج ان $b=-\frac{1}{4}$ و $a=\frac{1}{2}$ ومنه النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لـ $(\gamma)$

2) دراسة تغيرات الدالة $f$ على $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$

| $x$ | | -1 | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+1)(x-2)$ | - | 0 | + | | + | | + | 0 | - |
| $2x(x-1)$ | + | | + | 0 | - | 0 | + | | + |
| $\dfrac{-(x-1)(x+2)}{2x(x-1)}$ | - | 0 | + | 0 | - | ‖ | + | 0 | - |

إذا كان $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$ او $x\in]2,+\infty[$ فإن $f'(x)<0$

إذا كان $x\in]1,2[$ فإن $f'(x)>0$





حساب النهايات :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{4}$$

$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left|\frac{x-1}{x}\right|=0^+$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left|\frac{x-1}{x}\right|=0^+$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x-1}{x}\right|=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)=-\infty$

جدول تغيرات $f$ على $\left[\frac{1}{2},1\right[ \cup ]1,+\infty[$

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | - | ‖ | + | 0 | - | |
| تغيرات $f$ | $\frac{-1}{4}$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $-1-Ln(2)$ | ↘ | $-\infty$ |

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)\right]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$=Ln(1)=0$$

ومنه $y=\frac{-x}{2}$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma)$ في جوار $(+\infty)$

- للدراسة وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$

ندرس إشارة المقدار $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)$ على $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup]1,+\infty[$

لدينا $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

. إذا كان $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$ فإن $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$ .

بما ان $x > 1-x$ فإن $\frac{1-x}{x} < 1$ ومنه $Ln\left(\frac{1-x}{x}\right) < 0$

اي المنحنى $(\gamma)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$ في المجال $\left[\frac{1}{2},1\right[$ .

. إذا كان $x\in]1,+\infty[$ فإن $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

بما ان $x > x-1$ فإن $\frac{x-1}{x} < 1$

اي $Ln\left(\frac{x-1}{x}\right) < 0$

ومنه $(\gamma)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$ في المجال $]1,+\infty[$

صورة $(\Delta)$ بالتناظر المركزي الذي مركزه $A$ هو المستقيم $(\Delta)$.

صورة المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{1}{2}$ هو نفسه.

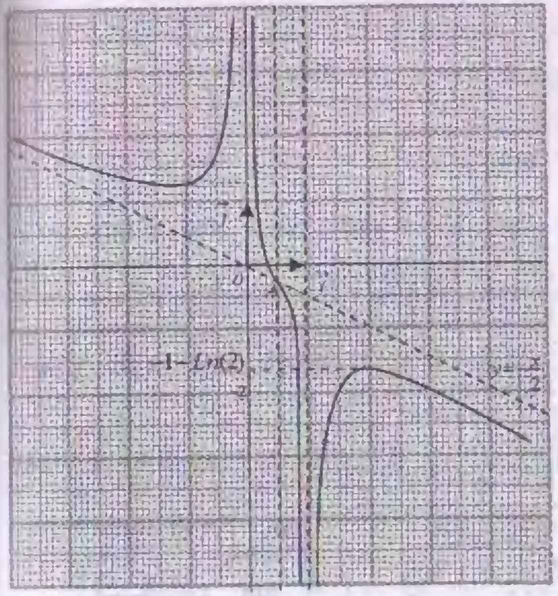
صورة النقطة $(2,-1-Ln(2))$ هي النقطة $\left(-1,\ \frac{1}{2}+Ln(2)\right)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$

$=-(-\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$




## تطبيق 36 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

I) $g$ دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-Ln(1+x^2)$

1) بين أنه على المجال $[1,+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ثم حدد حصرا له بتقريب $0,1$.

2) عين إشارة $g(x)$ على المجال $[0,+\infty[$

II) $f$ دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x} & ,\ x>0 \end{cases}$

1) أ) ما هي نهاية $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ لما $x$ يؤول إلى 0 ؟

ب) استنتج أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x=0$ ثم أوجد معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ للمنحنى البياني $(\gamma)$ الممثل لـ $f$

2) بين أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)=\frac{2\,Ln\,x}{x}+\frac{1}{x}Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ ثم استنتج نهاية $f$ عند $(+\infty)$.





3) أ) بين أنه من أجل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج تغيرات $f$.

ب) بين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ ثم ارسم $(T)$ و $(\gamma)$

## ✓ الحل

I) 1) الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $x>1$ لدينا $g'(x)<0$ إذن الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $[1,+\infty[$

وبالتالي $g([1,+\infty[)=]-\infty\ ,\ 1-Ln\,2]$

بما أن $0\in]-\infty\ ,\ 1-Ln\,2]$ و $g'<0$

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in[1,+\infty[$

- تعيين حصر لـ $\alpha$

باستعمال طريقة المسح نجد أن $\alpha\in]1\ ,\ 2[$ نحسب $g\left(\frac{1+2}{2}\right)$ اي $g(1{,}5)$

$g(1{,}5)=0{,}206>0$ و منه $\alpha\in]1{,}5\ ,2[$

2) تعيين إشارة $g(x)$

بما أن $g$ متناقصة تماما على المجال $[1,+\infty[$ و $g(\alpha)=0$ و $g(1)>0$ فإن :

إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ يكون $g(x)<0$

وإذا كان $x\in[1,\alpha[$ يكون $g(x)>0$

بما أن الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $[0,1[$ و $g(0)=0$ و $g(1)>0$

فإنه من أجل كل $x\in]0\ ,\ 1]$ يكون $g(x)>0$

| $x$ | 0 | | 1 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g(x)$ | 0 | | + | | 0 | − | |

II) $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x} & ,\ x>0 \end{cases}$

1) أ) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x^2)}{x^2}=\lim_{X\to 0}\frac{Ln(1+X)}{X}=1=\ell$

حيث $X=x^2$

ب) بما أن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ تساوي عدد حقيقي فإن $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر.

- معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ هي $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$

و بالحساب نجد $y = x$ .

2) من اجل كل $x \rangle 0$ لدينا $f(x) = \frac{2\,Ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \times Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

- بما ان $\lim_{x \to +\infty} Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\,Ln(x)}{x} = 0$

فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .

3) ا) من اجل كل $x \rangle 0$ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

$f'(x) = 0$ يكافىء $g(x) = 0$ يكافىء $x = \alpha$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | 0 | + | 0 | - | |
| تغيرات $f$ | 0 | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | 0 |

إذا كان $x \in ]0, \alpha[$ فإن $f'(x) \rangle 0$ و بالتالي $f$ متزايدة تماما على $[0, \alpha]$

و إذا كان $x \in ]\alpha, +\infty[$ فإن $f'(x) \langle 0$ وبالتالي $f$ متناقصة تماما على $]\alpha, +\infty[$

ب) بما ان $g(\alpha) = 0$ فإن $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - Ln(\alpha^2+1) = 0$

اي $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = Ln(\alpha^2+1)$

$$f(\alpha) = \frac{Ln(\alpha^2+1)}{\alpha} = \frac{\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}}{\alpha} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$$

نضع $L(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

الدالة $L$ قابلة للاشتقاق على $]1,5 \,, 2[$

ولدينا $L'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

ومن اجل كل $x$ من $]1,5 \,, 2[$

لدينا $L'(x) \langle 0$

اي $L$ متناقصة تماما على $]1,5 \,, 2[$

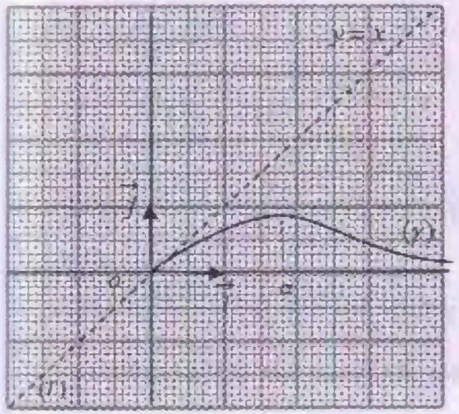
وعليه $L(]1,5 \,, 2[) = ]0,75 \,, 0,923[$

و بما ان $L(\alpha) = f(\alpha)$

فإن $f(\alpha) \in ]0,75 \,, 0,923[$

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$

مقارب لـ $(\gamma)$ في جوار $(+\infty)$








## تطبيق 37 عائلة المنحنيات

$n$ عدد طبيعي غير معدوم و $f_n$ دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بالعبارة $f_n(x) = x^n\, Ln(x+1)$ و $(\gamma_n)$ المنحنى الممثل للدالة $f_n$ في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول 2 cm)

1) لتكن $h_n$ دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $h_n(x) = n\,Ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة $h_n$

ب) احسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على $]-1,+\infty[$

2) ا) تحقق انه من اجل كل $x \in ]-1,+\infty[$ لدينا ، $f'_n(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$ مع $n \geq 2$

ب) نضع $n = 1$ تحقق ان $f'_1(x) = h_1(x)$ ثم بين ان $f'_1(x)$ و $h_1(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]-1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f_1$

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة $f_2$

3) ا) بين ان جميع المنحنيات $(\gamma_n)$ تمر من نقطة ثانية يطلب تعيينها.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ ثم ارسم $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ في نفس المعلم.

### ✓ الحل

1) ا) دراسة اتجاه تغير $h_n$ :

الدالة $h_n$ قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$

و لدينا $h'_n(x) = \frac{n\,x+(n+1)}{(x+1)^2}$

فالمعادلة $h'_n(x) = 0$ لها حل وحيد هو $x = -\left(\frac{n+1}{n}\right)$

بما ان $-\left(\frac{n+1}{n}\right) \langle -1$ فإن المعادلة $h'_n(x) = 0$ ليس لها حلولا في $]-1,+\infty[$

و إشارة $h'_n(x)$ هي نفس إشارة $n\,x+(n+1)$

| $x$ | | $-\left(\frac{n+1}{n}\right)$ | | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n\,x+(n+1)$ | - | 0 | + | | + |

من الجدول المجاور نستنتج انه من اجل كل $x \in ]-1, +\infty[$ يكون $h'_n(x) \rangle 0$ إذن الدالة $h_n$ متزايدة تماما على $]-1, +\infty[$

ب) بما ان $h_n(0) = 0$ فإنه إذا كان $x \in ]-1, 0[$ يكون $h_n(x) \langle 0$

و إذا كان $x \in ]0, +\infty[$ يكون $h_n(x) \rangle 0$

2) أ) الدالة $f_n$ قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ ولدينا $f_n'(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$

ب) من أجل $n=1$ نجد $f_1'(x) = h_1(x)$
وبالتالي إشارة $f_1'(x)$ هي نفس إشارة $h_1(x)$

$$\lim_{x \to -1} f_1(x) = \lim_{x \to -1} x\,Ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f_1'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f_1$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

جـ) من أجل $n=2$ :

$f_2'(x) = x\,h_2(x)$

$f_2'(0) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $f_2'(x) > 0$

وإذا كان $-1 < x < 0$ فإن $f_2'(x) > 0$

$$\lim_{x \to -1} f_2(x) = \lim_{x \to -1} x^2\,Ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\,Ln(x+1) = +\infty$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f_2'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f_2$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

3) أ) $M_0(x_0, y_0)$ تنتمي إلى $(\gamma_{n_1})$ و $(\gamma_{n_2})$ مع $n_1 \neq n_2$
هذا معناه أن :

$y_0 = x_0^{n_1}\,Ln(x_0+1)$

و $y_0 = x_0^{n_2}\,Ln(x_0+1)$

ومنه ينتج $x_0^{n_1}\,Ln(x_0+1) = x_0^{n_2}\,Ln(x_0+1)$

وبالتبسيط نجد $\left(Ln(x_0+1)\right)\left(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}\right) = 0$

أي $\left(Ln(x_0+1)\right) = 0$ لأن $\left(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}\right) \neq 0$

$Ln(x_0+1) = 0$ يكافئ $x_0 = 0$ و عليه $y_0 = 0$

إذن النقطة $O(0,0)$ تنتمي إلى جميع المنحنيات $(\gamma_n)$.

ب) دراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$

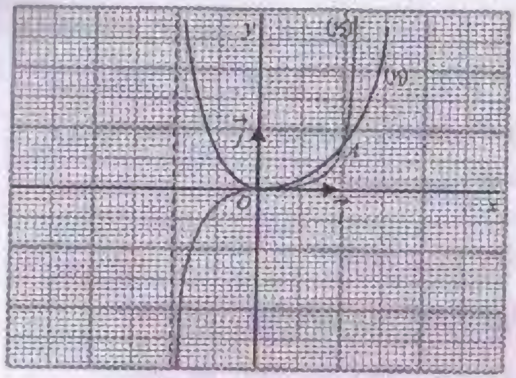
لدراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma_1)$ و $(\gamma_2)$ ندرس إشارة المقدار $f_2(x) - f_1(x)$ على $]-1,+\infty[$

$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)\,Ln(1+x)$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(x-1)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $Ln(1+x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2(x) - f_1(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |








- المنحني $(\gamma_2)$ يقطع المنحني $(\gamma_1)$ في النقطة $O(0,0)$ و يقطعه أيضا في النقطة $A(1, Ln(2))$
- إذا كان $x > 1$ فإن $(\gamma_2)$ يقع فوق $(\gamma_1)$
- إذا كان $x \in ]-1,1[$ فإن $(\gamma_2)$ يقع تحت $(\gamma_1)$

## تطبيق 38 الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،
$U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

$(V_n)$ متتالية معرفة من أجل كل $n$ بـ $V_n = Ln(U_n) - 2$

1) بين أن المتتالية $(V_n)$ هندسية معينا حدها الأول $V_0$ و أساسها $r$ .
2) استنتج عبارة $V_n$ و $Ln(U_n)$ بدلالة $n$ .
3) أ) ما هي نهاية $(V_n)$ ؟
ب) استنتج أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو $e^2$ .

### ✓ الحل

1) $(V_n)$ هندسية معناه أنه يوجد $r$ من $\mathbb{R}^*$
بحيث من أجل كل $n$ لدينا $V_{n+1} = V_n \times r$

$$V_{n+1} = Ln(U_{n+1}) - 2 = Ln\left(e\sqrt{U_n}\right) - 2 = Ln(e) + Ln\left(\sqrt{U_n}\right) - 2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}Ln(U_n) - 2 = \frac{1}{2}\left(Ln(U_n) - 2\right) = \frac{1}{2}V_n$$

إذن المتتالية $(V_n)$ هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $V_0 = Ln(U_0) - 2 = 1$

2) $V_n = V_0 \times r^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$Ln(U_n) = V_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

3) ا) $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ لأن $1 > \frac{1}{2} > 0$

ب) بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} Ln(U_n) = 2$ و $Ln(e^2) = 2$

و الدالة $x \mapsto Ln\, x$ متزايدة تماما فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = e^2$

## تطبيق 39 • الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

$(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل $n \geq 1$ ب $U_1 = 2$

و $Ln(U_{n+1}) = \frac{1}{2}\left[Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right]$

1) بين أن هذه المتتالية معرفة و ان جميع حدودها اصغر من او يساوي 2 .

2) من أجل كل $n \geq 1$ نعرف المتتاليتين $(V_n)$ و $(W_n)$ ب $V_n = n \times U_n$ و $W_n = Ln(V_n)$

أوجد العلاقة بين $V_n$ و $V_{n+1}$ ثم استنتج ان المتتالية $(W_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها $r$ .

3) بين ان المتتالية $(W_n)$ متقاربة ثم استنتج أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو نهاية يطلب ايجادها .

4) - ا) احسب المجموع $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ ثم استنتج عبارة الجداء $\pi_n = V_1 V_2 \dots \times V_n$ ثم عبارة $Q_n$ حيث $Q_n = U_1 U_2 \dots \times U_n$

ب) ادرس نهايات المتتاليات $(S_n)$ ، $(Q_n)$ ، $(\pi_n)$ .

✓ الحل

1) الدالة $x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2}$ متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$ ،

و بالتالي من اجل كل $x$ من $[1, +\infty[$ لدينا $0 < \frac{x}{(x+1)^2} < \frac{1}{2}$

و منه ينتج $0 < \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{2}$

نريد إثبات ان من اجل كل $n \geq 1$ يكون $0 < U_n \leq 2$ ، نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع

نسمي $P_n$ الخاصية $(0 < U_n \leq 2)$

$P_1$ صحيحة لأن $0 < U_1 \leq 2$

نفرض ان $P_n$ صحيحة اي $0 < U_n \leq 2$ و نبرهن ان $P_{n+1}$ صحيحة اي $0 < U_{n+1} \leq 2$

بما ان $0 < U_n \leq 2$ و $0 < \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$ فإن $0 < U_n \times \frac{n}{(n+1)^2} \leq 1$





ومنه نستنتج $Ln\left(U_n \times \frac{n}{(n+1)^2}\right) < 0$ اي $Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) < 0$

وبالقسمة على 2 نجد $\frac{1}{2}\left[Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right] < 0$ اي $Ln(U_{n+1}) < 0$ .

بما أن $Ln(U_{n+1}) < 0$ فإن $0 < U_{n+1} < 1$ و بما ان $2 \geq 1$

فإن $0 < U_{n+1} \leq 2$ إذن $P_{n+1}$ صحيحة

وبالتالي $P_n$ صحيحة من اجل كل $n \geq 1$

2) $V_{n+1} = (n+1)\, U_{n+1}$ ومنه $Ln(V_{n+1}) = Ln((n+1)\, U_{n+1})$

$$Ln(V_{n+1}) = Ln(n+1) + Ln(U_{n+1}) = Ln(n+1) + \frac{1}{2}\left[Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right]$$

$$= Ln(n+1) + \frac{1}{2} Ln(U_n) + \frac{1}{2} Ln(n) - Ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} Ln(U_n) + \frac{1}{2} Ln(n) = \frac{1}{2} Ln(n \times U_n)$$

$$= \frac{1}{2} Ln(V_n) = Ln\left(V_n^{\frac{1}{2}}\right)$$

ومنه $V_{n+1} = V_n^{\frac{1}{2}}$

- استنتاج ان المتتالية $(W_n)$ هندسية .

$$W_{n+1} = Ln(V_{n+1}) = Ln\left(V_n^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} Ln(V_n) = \frac{1}{2} W_n$$

ومنه المتتالية $(W_n)$ هندسية اساسها $r = \frac{1}{2}$ .

3) بما ان $r = \frac{1}{2}$ فإن المتتالية $(W_n)$ متقاربة نحو الصفر

بما ان $W_n = Ln(V_n)$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

لأن $\left(U_n = V_n \times \frac{1}{n}\right)$

4) ا) $S_n = W_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$ ، $W_1 = Ln(V_1) = Ln(U_1) = Ln(2)$

$$S_n = Ln(2) \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2\, Ln(2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

- $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$

$S_n = Ln(V_1) + \dots + Ln(V_n)$

$S_n = Ln(V_1 \times \dots \times V_n) = Ln(\pi_n)$

ومنه $\pi_n = e^{S_n} = e^{-2Ln(2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}$

$\pi_n = (1 \times U_1)(2 \times U_2) \times \dots \times (n\,U_n)$

$\pi_n = (1 \times 2 \times \dots \times n)(U_1 \times \dots \times U_n)$

$\pi_n = (n!)\,Q_n$ ومنه $Q_n = \frac{\pi_n}{n!}$

ب) $\lim_{n \to +\infty} S_n = 2\,Ln(2)$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} \pi_n = \lim_{n \to +\infty} e^{S_n} = e^{2Ln(2)}$

$\lim_{n \to +\infty} Q_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi_n}{n!} = 0$

لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} \pi_n = e^{2Ln(2)}$



## تطبيق 40 الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

$f$ دالة معرفة على المجال $I = ]e+1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x-1}{Ln(x-1)} + 1$

1) أ) عين اتجاه تغير الدالة $f$.

ب) عين نهاية $f$ على أطراف المجال $I$.

جـ) برهن انه إذا كان $x > e+1$ فإن $f(x) > e+1$

2) نعرف المتتالية $(U_n)$ بـ $U_0 = e^2+1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$، $U_{n+1} = f(U_n)$

أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n > e+1$

ب) برهن أن المتتالية $(U_n)$ متناقصة

جـ) استنتج أن $(U_n)$ متقاربة نحو $\ell$ ثم عين $\ell$.

### الحل

1) أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]e+1, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{Ln(x-1)-1}{[Ln(x-1)]^2}$

بما ان $x > e+1$ فإن $x-1 > e$





ومنه $Ln(x-1) > 1$ إذن $f'(x) > 0$ على المجال $]e+1, +\infty[$

وبالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$

ب) $\lim_{x \to e+1} f(x) = e+1$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

جـ) بما ان الدالة $f$ متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$

فإنه إذا كان $x > e+1$ يكون $f(x) > f(e+1)$ اي $f(x) > e+1$

2) أ) نسمي $P_n$ الخاصية $(U_n > e+1)$

$P_0$ صحيحة لأن $U_0 = e^2+1$ و $e^2+1 > e+1$

نفرض أن $P_n$ صحيحة اي $U_n > e+1$

ونبرهن أن $P_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1} > e+1$

بما أن $U_n > e+1$ و $f$ متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$

فإن $f(U_n) > f(e+1)$ اي $U_{n+1} > e+1$

ومنه $P_{n+1}$ صحيحة

و بالتالي $P_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

ب) بما ان $f$ متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$ فإن $(U_n)$ رتيبة،

ولتعيين نوع الرتابة نحسب $U_1 - U_0$.

إذا كان $U_1 - U_0 > 0$ نقول ان $(U_n)$ متزايدة

وإذا كان $U_1 - U_0 < 0$ نقول ان $(U_n)$ متناقصة

$U_1 - U_0 = \frac{U_0 - 1}{Ln(U_0 - 1)} + 1 - U_0 = -\frac{1}{2}e^2 < 0$

ومنه $(U_n)$ متناقصة

جـ) بما ان $(U_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو $\ell$ حيث $\ell$ حل لـ $x = f(x)$

$x = f(x)$ يكافئ $(x = 1)$ او $(x = e+1)$

بما أن $1 \notin ]e+1, +\infty[$ فإنه مرفوض و بالتالي $\lim_{n \to +\infty} U_n = e+1$

## تطبيق 41 الكيمياء $PH$

في الكيمياء الرمز $PH$ يعني كمون الهيدروجين.

$PH$ يسمح لنا بالتعبير عن الطبيعة الحمضية أو الأساسية لمحلول مائي.

إذا كانت $[H_3\overset{+}{O}]$ تمثل تركيز شوارد الهيدروجين بالمول.

نضع $PH = -Log[H_3\overset{+}{O}]$.

1) من اجل محلول حمضي لدينا $1 < PH < 7$ استنتج تركيز $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ .

2) من اجل محلول قاعدي (أساسي) لدينا $7 < PH < 14$

استنتج تركيز $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ لهذا المحلول القاعدي.

3) ماء معدني غازي يحمل إشارة $PH = 6,5$ ما هو تركيزه بشوارد $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ ؟

4) متوسط تركيز $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ في بول لأكلات اللحوم هو $\left[H_3\overset{+}{O}\right] = 3,2\times10^{-6}$ مول على اللتر. احسب $PH$ هذا المحلول. ماذا تستنتج ؟

5) إذا علمت ان تركيز $H_3\overset{+}{O}$ في الدم هو $4\times10^{-8}$ مول على اللتر. بين ان الدم له طبيعة قاعدية ضعيفة.

✓ الحل

1) $1 < PH < 7$ هذا يعني $1 < -\text{Log}\left[H_3\overset{+}{O}\right] < 7$ اي $1 < \text{Log}\dfrac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} < 7$

بما أن الدالة $x \mapsto 10^x$ متزايدة تماما فإنه ينتج $10^1 < \dfrac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} < 10^7$

بالقلب نجد $10^{-7} < \left[H_3\overset{+}{O}\right] < 10^{-1}$

2) $7 < PH < 14$ هذا يعني $7 < -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right] < 14$.

$7 < -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right] < 14$ منه نستنتج $10^7 < \dfrac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} < 10^{14}$

بالقلب نجد $10^{-14} < \left[H_3\overset{+}{O}\right] < 10^{-7}$

3) $PH = -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ منه $PH = Log\dfrac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]}$ منه $\dfrac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} = 10^{PH}$

بالقلب نجد $\left[H_3\overset{+}{O}\right] = 10^{-PH}$ اي $\left[H_3\overset{+}{O}\right] = 10^{-6.5}$





4) $PH = -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right] = -Log\left(3,2\times10^{-6}\right) = 5,494$

بما ان $1 < PH < 7$ فإن هذا المحلول حمضي.

5) $\left[H_3\overset{+}{O}\right] = 4\times10^{-8}$ ومنه $PH = -Log\left(4\times10^{-8}\right) = 7,40$

بما ان $7 < PH < 14$ فإن هذا المحلول قاعدته ضعيفة .

## تطبيق 42 حل المعادلات والمتراجحات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

أ) $7^{x-2} = 5^x$ ، ب) $5^x \geq 4$ ، جـ) $\dfrac{1}{4} < \dfrac{3^x}{3^x+1}$

د) $2^{4x-2} - 2^{2x} - 3 = 0$ ، هـ) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$ ، و) $5^{x+1} + 2\times5^{-x} = 7$

✓ الحل

أ) $7^{x-2} = 5^x$ تكافئ $(x-2)Ln(7) = x\,Ln(5)$ يكافئ $x = \dfrac{2\,Ln(7)}{Ln\left(\dfrac{7}{5}\right)}$

ب) $5^x \geq 4$ يكافئ $x\,Ln(5) \geq 4$ يكافئ $x \geq \dfrac{4}{Ln(5)}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $5^x \geq 4$ هي $S = \left[\dfrac{4}{Ln(5)}, +\infty\right[$

جـ) $\dfrac{1}{4} < \dfrac{3^x}{3^x+1}$ يكافئ $3^x + 1 < 4\times3^x$ يكافئ $x \leq -1 + \dfrac{1}{Ln(3)}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = \left]-\infty, -1 + \dfrac{1}{Ln(3)}\right]$

د) المعادلة (د) تكتب $\left(2^{2x}\right)^2 \times 2^{-2} - 2^{2x} - 3 = 0$ و بوضع $X = 2^{2x}$

تصبح $2^{-2}X^2 - X - 3 = 0$ وحلا هذه الأخيرة هما 4- و 12

$X_2$ مرفوض لأنه سالب و $X_1$ مقبول

$X = X_1$ تكافئ $x = \dfrac{Ln(12)}{Ln(4)}$ ومنه $S = \left\{\dfrac{Ln(12)}{Ln(4)}\right\}$

هـ) المتراجحة (هـ) تكتب على شكل $\left(2^x\right)^2 + 2\times2^x - 3 \leq 0$

وبوضع $X = 2^x$ تصبح $X^2 + 2X - 3 \leq 0$.

للمعادلة $X^2 + 2X - 3 = 0$ حلان هما 1 و 3 -

و بالتالي $X^2+2X-3=(X+3)(X-1)$ إذن $(2^x)^2+2\times2^x-3=(2^x+3)(2^x-1)$

من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $2^x+3>0$

و منه إشارة $(2^x)^2+2\times2^x-3$ هي نفس إشارة $(2^x-1)$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $2^x-1$ | | - | 0 | + | |
| إشارة $(4^x+2^{x+1}-3)$ | | - | 0 | + | |

من الجدول المجاور نستنتج انه إذا كان $x\le0$ فإن $4^x+2^{x+1}-3\le0$ و منه مجموعة حلول المتراجحة $4^x+2^{x+1}-3\le0$ هي $S=]-\infty,0]$

و) بضرب طرفي المعادلة (و) في العدد $5^x$ نجد $5^{2x+1}+2=7\times5^x$ بالتبسيط نجد $5^{2x+1}-7\times5^x+2=0$ و بوضع $X=5^x$ تصبح $5X^2-7X+2=0$ .

حلا المعادلة $5X^2-7X+2=0$ هما 1 و $\frac{2}{5}$ .

$X=1$ يكافئ $5^x=1$ تكافئ $x=0$

$X=\frac{2}{5}$ يكافئ $5^x=\frac{2}{5}$ يكافئ $x=\dfrac{Ln\left(\frac{2}{5}\right)}{Ln(5)}$

إذن مجموعة حلا المعادلة (و) هي $S=\left\{\dfrac{Ln\left(\frac{2}{5}\right)}{Ln(5)}\ ,\ 0\right\}$ .

## تطبيق 43 حل جملة معادلتين

حل في $\mathbb{R}^2$ الجملتين التاليتين :

أ) $\begin{cases}x+y=3\\2^x\times3^y=18\end{cases}$ ، ب) $\begin{cases}5^x\times5^y=25\\5^x+5^y=\frac{626}{5}\end{cases}$

✓ الحل

أ) $\begin{cases}x+y=3\ \dots\ (1)\\2^x\times3^y=18\ \dots\ (2)\end{cases}$

من (1) نجد $y=3-x$ نعوض $y$ في (2) نجد $2^x\times3^{3-x}=18$

ومنه نستنتج $Ln\left(2^x\right)+Ln\left(3^{3-x}\right)=Ln(18)$ اي $x\,Ln(2)+(3-x)Ln(3)=Ln(18)$

بالتبسيط نجد $x\,Ln\left(\frac{2}{3}\right)=Ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ومنه نجد $x=1$ .





نعوض قيمة $x$ في عبارة $y$ نجد $y=2$

إذن مجموعة حلول الجملة (أ) هي $S=\{(1,2)\}$ .

ب) بوضع $X=5^x$ و $Y=5^y$

فالجملة (ب) تصبح كما يلي $(I)\ \dots\ \begin{cases}XY=25\ \dots\ (1)\\X+Y=\frac{626}{5}\ \dots\ (2)\end{cases}$

من المساواة $XY=25$ نجد $Y=\frac{25}{X}$

وبتعويض عبارة $Y$ في المعادلة (2) نجد $X+\frac{25}{X}=\frac{626}{5}$

بالتبسيط نجد $5X^2-626X-125=0$

وبعد حل هذه الأخيرة نجد $X_1=\frac{625+\sqrt{395436}}{10}$ ، $X_2=\frac{625-\sqrt{395436}}{10}$

$X_2$ سالب فهو مرفوض و $X_1$ موجب فهو مقبول.

$X=X_1$ يكافئ $5^x=X_1$ يكافئ $x=\frac{Ln(X_1)}{Ln(5)}$

بتعويض قيمة $X$ في عبارة $Y$ نجد $Y=\frac{25}{X_1}$

$Y=\frac{25}{X_1}$ يكافئ $5^y=\frac{25}{X_1}$ يكافئ $y=\dfrac{Ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{Ln(5)}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left\{\left(\dfrac{Ln(X_1)}{Ln(5)}\ ,\ \dfrac{Ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{Ln(5)}\right)\right\}$ .

## تطبيق 44 رسم التمثيل البياني لدالة

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2-x)2^x$

ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم $(C_f)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس .

✓ الحل

$2^x=e^{x\,Ln(2)}$ منه $f(x)=(2-x)\,e^{x\,Ln(2)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2e^{x\,Ln2}-\frac{1}{Ln2}\,(Ln2)\,x\,e^{x\,Ln2}\right]=0$ .

لأن $\lim\limits_{X\to-\infty} X e^{X}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(Ln\,2)\,x\,e^{x\,Ln\,2}=$ مع $X=x\,Ln\,2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\,Ln 2}=+\infty$ .

• الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\left(-x\,Ln(2)-1+2\,Ln\,2\right)e^{x\,Ln(2)}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}=\alpha$

- إذا كان $x > \frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$ ، فإن $f'(x) < 0$

- إذا كان $x < \frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$ فإن $f'(x) > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | - | 0 | + |
| تغيرات $f$ | $0$ ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ $-\infty$ |

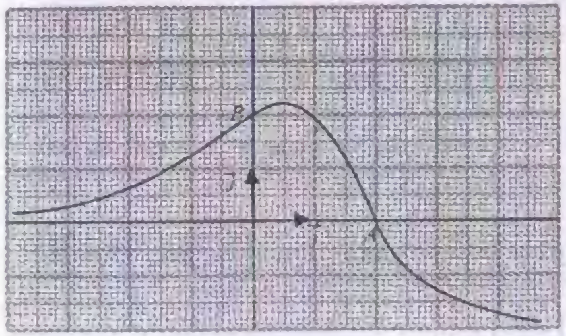
$\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}\approx 0,56$

و $f\left(\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}\right)\approx 2,1$

المنحني $(C_f)$ يقطع $(xx')$ في النقطة $A(2,0)$

المنحني $(C_f)$ يقطع $(yy')$ في النقطة $B(0,2)$

يمكن التأكد من أن المنحني $(C_f)$ له نقطة انعطاف فاصلتها أكبر 2




## تطبيق 45 إيجاد عدد حلول المعادلة $x^3=(1,5)^x$

1) بين أنه من أجل كل $0 \langle x$ المساواة $x^3=(1,5)^x$ تكتب على الشكل : $\frac{Ln(x)}{x}=\frac{Ln(1,5)}{3}$ ... (1)

2) ادرس تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{Ln\,x}{x}$

بين أن للمعادلة $f(x)=\frac{Ln(1,5)}{3}$ حلين موجبين فقط .

✔ الحل

1) من المساواة $x^3=(1,5)^x$ ينتج $Ln(x^3)=Ln(1,5)^x$





وباستعمال خواص الدالة $Ln$ نجد $3\,Ln\,x=x\,Ln(1,5)$

ومنه ينتج $\frac{Ln(1,5)}{3}=\frac{Ln(x)}{x}$ .

2) $D_f=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\overset{+}{0}$ و

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-Ln\,x}{x^2}=\frac{1-Ln\,x}{x^2}$

| $x$ | $0$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | - |
| $f$ | $-\infty$ ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ $\overset{+}{0}$ |

الدالة $f$ متناقصة تماما على $[e,+\infty[$ و متزايدة تماما على $]0,e]$

ب) بما أن $0 \rangle f'$ على $]0,e[$ و $\frac{Ln(1,5)}{3}\in\left]-\infty,\frac{1}{e}\right[$

فإن للمعادلة $f(x)=\frac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا $\alpha$ ينتمي إلى $]0,e[$ .

بما أن $f' \langle 0$ و $\frac{Ln(1,5)}{3}\in\left]0,\frac{1}{e}\right[$

فإن للمعادلة $f(x)=\frac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا $\beta$ ينتمي إلى $]e,+\infty[$ .

## تطبيق 46 حل معادلات ومتراجحات

حل المعادلات و المتراجحات و الجمل التالية :

1) $x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2=0$ ، 2) $x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2 \rangle 0$

3) $\begin{cases} x^y=y^x \\ x=y^2 \end{cases}$

✔ الحل

1) بوضع $X=x^{\frac{1}{3}}$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2-3X+2=0$ و حلاها هما 1 ، 2

$X=1$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}}=1$ يكافئ $x=1^3=1$

$X=2$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}}=2$ يكافئ $x=8$

منه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{1,8\}$

2) بوضع $X = x^{\frac{1}{3}}$ المتراجحة (2) تكتب على الشكل $(X-1)(X-2) > 0$
ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $]-\infty\,,1[\cup]2\,,+\infty[$
وبما ان الدالة $x \mapsto x^3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $x \in ]-\infty\,,1[\cup]8\,,+\infty[$
و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S = ]-\infty\,,1[\cup]8\,,+\infty[$

3) الجملة لها معنى إذا و فقط إذا كان $x > 0$ و $y > 0$ .
الجملة تكتب على شكل $\begin{cases} e^{x\,Ln(y)} = e^{y\,Ln(x)} \\ x = y^2 \end{cases}$ و هذه الأخيرة تكتب $\begin{cases} e^{y^2 Ln(y)} = e^{y\,Ln(y^2)} \\ x = y^2 \end{cases}$
ومنه $\begin{cases} e^{y^2 Ln(y) - 2y\,Ln(y)} = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$ وبالتبسيط نجد $(y^2-2y)Ln(y) = 0$ و $x = y^2$ .
حلول المعادلة $(y^2-2y)Ln(y)=0$ هي $(y=2)$ او $y=1$ .
إذا كان $y=2$ فإن $x=4$ و إذا كان $y=1$ فإن $x=1$ .
ومنه مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S=\{(4,2)\,,(1,1)\}$ .

## تطبيق 47 الدوال اللوغاريتمية و الأسية

$f$ دالة معرفة بـ $f(x) = Ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) برر صحة كل من المعلومات التالية
أ) $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ .
ب) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = 2x + Ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$ .
جـ) المنحني $(\gamma)$ يقبل المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y = 2x$ كمستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$.
د) المنحني $(\gamma)$ يقبل مماسا وحيدا موازيا لمحور التراتيب.
2) ارسم $(d)$ و $(\gamma)$ و المماس لـ $(\gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

✓ الحل

1) أ) $f$ معرفة إذا و فقط إذا كان $e^{2x} - e^x + 1 > 0$ ... (1)
بوضع $X = e^x$ المتراجحة (1) تكتب $X^2 - X + 1 > 0$ .
مميز $X^2 - X + 1$ هو $\Delta = -3$
$\Delta < 0$ منه إشارة $(X^2 - X + 1)$ هي من إشارة معامل $X^2$ اي موجبة تماما.
بالتالي $e^{2x} - e^x + 1 > 0$ إذن $D_f = \mathbb{R}$ .



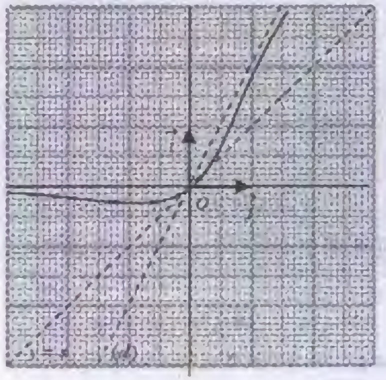


ب) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :
$$f(x) = Ln\ e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) = Ln\ e^{2x} + Ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$$
$$= 2x + Ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$$
جـ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} Ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) = 0$
إذن $(d): y = 2x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\gamma)$ في جوار $(+\infty)$ .
د) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{(e^{2x} - e^x + 1)}$

$f'(x) = 0$ تكافئ
$e^x(2e^x - 1) = 0$ يكافئ
$x = -Ln(2)$
إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x} - e^x)$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-Ln(2)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | - | 0 | + |
| تغيرات $f$ | 0 ↘ | $f(-Ln\,2)$ | ↗ $+\infty$ |

بما ان $f'(x)$ ينعدم عند $-Ln(2)$ مغيرا إشارته في جوار $-Ln(2)$
فإن المنحني $(\gamma)$ له مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة $-Ln(2)$



2) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0
معادلته $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
بالتعويض نجد $y = x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f(-Ln(2)) = Ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}28$

## تطبيق 48 الدوال اللوغاريتمية و الأسية

$f$ دالة معرفة بـ $f(x) = Ln\left(x + e^{-x}\right)$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) أ) بين انه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $x + e^{-x} \geq 1$ .
ب) استنتج أن $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ .
2) أ) تحقق من صحة المعلومات التالية :
- من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = -x + Ln\left(1 + x e^x\right)$
- من اجل كل $x > 0$ لدينا $f(x) - Ln\,x = Ln\left(1 + \dfrac{e^{-x}}{x}\right)$

ب) عين نهايات الدالة $f$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

جـ) استنتج من السؤال السابق أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ $(\gamma)$ بجوار $(-\infty)$.

3) ماهي نهاية $[f(x)-Ln\,x]$ عند $(+\infty)$ ماذا تستنتج ؟

4) ادرس تغيرات الدالة $f$ مشكلا جدول تغيراتها.

5) ارسم $(d)$ و $(\gamma)$ و $(\Gamma)$ حيث $(\Gamma)$ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto Ln\,x$

## ✓ الحل

1) أ) نضع $g(x)=x+e^{-x}-1$ و نبين أن $g(x)\geq 0$

و من أجل ذلك ندرس تغيرات الدالة $g$ .

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=1-e^{-x}$

$g'(x)=0$ تكافئ $e^{-x}=1$ يكافئ $x=0$

إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)>0$ منه $g$ متزايدة تماما على $]0\,,+\infty[$.

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)<0$ منه $g$ متناقصة تماما على $]-\infty\,,0[$ .

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $g$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

من جدول تغيرات نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $g(x)\geq 0$ أي $x+e^{-x}\geq 1$ .

ب) بما أن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ؛ $x+e^{-x}\geq 1$ فإن $x+e^{-x}\geq 0$ و هذا يعني أن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ .

2) أ) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ؛

لدينا $f(x)=Ln\,e^{-x}\left(1+xe^{x}\right)= Ln\left(e^{-x}\right)+Ln\left(1+xe^{x}\right) = -x+Ln\left(1+xe^{x}\right)$

من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)=Ln\,x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=Ln\,x+Ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

منه $f(x)-Ln\,x = Ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+Ln\left(1+xe^{x}\right)\right]=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} Ln\left(x+e^{-x}\right)=+\infty$

جـ) $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}Ln\left(1+xe^{x}\right)=0$





و منه $(d): y=-x$ مقارب مائل بجوار $(-\infty)$ لـ $(\gamma)$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-Ln(x) = \lim_{x\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{xe^{x}}\right)=0$

نستنتج أنه بجوار $(+\infty)$ للنحني $(\Gamma)$ الممثل للدالة $Ln$ مقارب للمنحني $(\gamma)$ .

4) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $f'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\left(1-e^{-x}\right)$

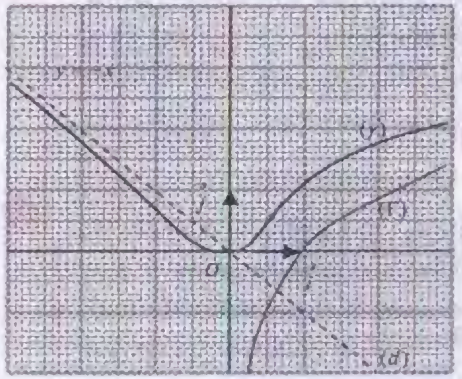
$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

إذا كان $x>0$ فإن $f'(x)>0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $]0\,,+\infty[$ .

إذا كان $x<0$ فإن $f'(x)<0$ و منه $f$ متناقصة تماما على $]-\infty\,,0[$ .

المنحني $(\gamma)$ يقع تحت $(d)$ من أجل كل $x<0$ .



# تمارين و مسائل

**1** - عين الأعداد الحقيقية $x$ التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $Ln(2x+1)$ ، ب) $Ln(-x^2)$ ، جـ) $Ln(x^2+4x-5)$.

د) $Ln(x^2-1)-Ln(2x+1)$ ، و) $Ln(2+x)(x-1)$ ، ي) $Ln(x^2+1)+Ln(x^2-1)$

**2** - في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية $x$ التي من أجلها العبارة المعطاة ذات معنى:

أ) $Ln\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)$ ، ب) $Ln\left(\left|\frac{2x+3}{1-x}\right|\right)$ ، جـ) $Ln\left(\left|x^2-1\right|-1\right)$

د) $\frac{x+1}{Ln(x)-2}$ ، و) $\frac{x}{[Ln\,x]^2+3\,Ln\,x-2}$ ، ي) $Ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)$ ، هـ) $\sqrt{Ln\,x}$

**3** - $f$ دالة معرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=a\,x^2+b\,x+Ln(x+2)$ مع $a$ و $b$ عددان حقيقيان، $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

$A(-1,2)$ نقطة من $(C_f)$ بحيث المماس عندها يوازي مستقيم ميله 2

عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$.

**4** - $(\gamma)$ المنحني البياني للدالة $Ln$ في معلم متعامد و متجانس، $M$ نقطة من $(\gamma)$ فاصلتها $m$.

1) أوجد بدلالة $m$ معادلة المماس $T$ للمنحني $(\gamma)$ عند النقطة $M$.

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي $m>0$ ، المماس $T$ يقطع محور التراتيب في نقطة $K$ إحداثييها $(0\ ,\ Ln(m)-1)$.

ب) استنتج أنه إذا كانت $H$ المسقط العمودي لـ $M$ على محور التراتيب فإن $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$

جـ) أعط عندئذ طريقة بسيطة لإنشاء المماس للمنحني $(\gamma)$ عند النقطة $M$.

**5** - عين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة:

أ) $f(x)=\frac{x}{Ln(x)}$ ، ب) $f(x)=x+Ln(x+1)$ ، جـ) $f(x)=Ln\left(\frac{x+2}{-x+1}\right)$

د) $f(x)=Ln(x^2+3x)$ ، و) $f(x)=Ln(|x-1|)$ ، ن) $f(x)=Ln\left(\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\right)$





**6** - حل المعادلات التالية:

أ) $Ln(-x+3)=2\,Ln\,2$ ، ب) $2\,Ln\,x=Ln(-3x+4)$

جـ) $Ln(x^2-4x)=Ln(x+4)$ ، د) $Ln(x^2-1)=0$ ، هـ) $Ln(x^2-1)=-1$

و) $Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2$ ، ن) $Ln(x+2)+Ln(x-2)=Ln(21)$

**7** - حل المتراجحات التالية:

أ) $Ln(x)-3\geq 0$ ، ب) $Ln(x)>Ln(2-x)$ ، جـ) $Ln(2x-6)>2$

د) $Ln(x+3)+2<0$ ، هـ) $Ln\left(\frac{x+2}{x}\right)>1$ ، و) $Ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)<0$

ن) $Ln(x-2)\leq Ln(3x-1)$ ، ي) $Ln(5x)\leq Ln(x^2-x)$

**8** - في كل حالة من الحالات التالية عين المجموعة التي تكون فيها الدالة $f$ معرفة:

أ) $f(x)=\sqrt{Ln(x)-2}$ ، ب) $f(x)=\sqrt{Ln(2x)-5}$

جـ) $f(x)=\frac{1}{2\,Ln(x-1)+3}$ ، د) $f(x)=\frac{x}{Ln(x^2-1)-3}$

هـ) $f(x)=\frac{Ln(2x-1)}{2\,Ln\,x-6}$ ، و) $f(x)=Ln(3-Ln\,x)$

ن) $f(x)=Ln(Ln(x))$

**9** - 1) حل الجملة $\begin{cases}3x+5y=21\\4x+7y=29\end{cases}$ ثم استنتج حل الجملة:

$$\begin{cases}3\,Ln(x)+4\,Ln(y)=21\\4\,Ln(x)+7\,Ln(y)=29\end{cases}$$

**10** - حل الجملتين التاليتين:

1) $\begin{cases}x-y=8\\Ln(x)-Ln(y)=2\,Ln(3)\end{cases}$ ، 2) $\begin{cases}x+y=12\\Ln(x)+Ln(y)=3\,Ln(3)\end{cases}$

**11** - ليكن $P(x)$ كثير حدود معرف بـ $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) بين أن $P(1)=0$ ثم حلل $P(x)$ إلى جداء عوامل ثم حل المعادلة $P(x)=0$.

2) حل المعادلة $(Ln\,x)^3-2(Ln\,x)^2-5\,Ln\,x+6=0$

3) حل المتراجحة $(Ln\,x)^3-2(Ln\,x)^2-5\,Ln\,x+6\geq 0$

**12** - $(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ $U_n = Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

1) احسب نهاية $(U_n)$.

2) نضع $S_n = U_1+U_2+....+U_n$ احسب $S_n$ بدلالة $n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

**13** - في كل حالة من الحالات التالية ادرس نهاية $f$ عند المكان المعطى :

أ) $f(x)=\frac{Ln\, x}{x-1}$ عند 1 ؛ ب) $f(x)=\frac{Ln\, x}{x-1}$ عند 0

جـ) $f(x)=x+1-Ln(x)$ عند $(+\infty)$ ، د) $f(x)=\frac{1}{x^2}-Ln\, x$ عند $+\infty$ و 0

هـ) $f(x)=x+x\, Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$ ، و) $f(x)=\frac{x\, Ln\, x}{x+2}$ عند 0

ي) $f(x)=1+x^2-x^2\, Ln\, x$ عند $+\infty$ ، ن) $f(x)=\frac{Ln(x)-1}{x-e}$ عند $e$

**14** - ادرس نهاية الدالة $f$ عند أطراف المجال $I$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{x}{Ln\, x}$ ، $I=]1,+\infty[$

ب) $f(x)=x(2-Ln\, x)$ ، $I=]0,+\infty[$

جـ) $f(x)=Ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$ ، $I=]-\infty,-3[$

د) $f(x)=\frac{Ln(x)-3}{x}$ ، $I=]e^3,+\infty[$

هـ) $f(x)=\frac{x+2}{Ln\, x}$ ، $I=]1,+\infty[$

و) $f(x)=x+2+Ln\, x-Ln(x^2+1)$ ، $I=]0,+\infty[$

ن) $f(x)=x^2+x-x\, Ln\, x$ ، $I=]0,+\infty[$

ي) $f(x)=\sqrt{x}\, Ln(x)+1$ ، $I=]0,+\infty[$

ع) $f(x)=x^2-Ln(x^2+1)$ ، $I=\mathbb{R}$

**15** - حل المعادلات التالية :

أ) $Ln|x+3|+Ln|x-1|=0$

ب) $Ln|x+3|+Ln|x-1|=Ln\, 8$

جـ) $Ln|2x+7|+Ln|x+1|=2\, Ln|x+2|$

د) $Ln(x-2)-Ln(x)=Ln(\alpha)$





**16** - حل المتراجحات و الجمل التالية :

1) $3(Ln\, x)^2-4\, Ln\, x-3\geq 0$ ، 2) $2(Ln|x|)^2+3\, Ln(x^2)-5<0$

3) $\begin{cases} Ln(x)\, Ln(y)=6 \\ Ln(x\, y)=5 \end{cases}$ ، 4) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ Ln(x\, y)=\frac{1}{2}Ln(3) \end{cases}$

**17** - الدوال التالية معرفة على $I=]0,+\infty[$ ادرس تغيرات كل منها ثم ارسم منحناها البياني

أ) $f(x)=\frac{Ln\, x}{x}$ ، ب) $f(x)=(Ln\, x)^2+1$ ، جـ) $f(x)=\frac{2-Ln\, x}{x}$

د) $f(x)=x+1-Ln\, x$ ، هـ) $f(x)=x^2-x+1+3\, Ln\, x$

**18** - لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\frac{1}{Ln\, x}$

ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم منحناها البياني.

**19** - $f$ و $g$ دالتان معرفتان على المجال $I=[0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x+2)$ و $g(x)=\frac{x+1}{x+2}$ . $(C_f)$ و $(C_g)$ منحناهما البيانيين في معلم متعامد و متجانس.

1) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ يكون $g(x)\leq f(x)$

2) برهن ان $(C_f)$ و $(C_g)$ لهما مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة $x=-1$

ثم ارسم $(C_f)$ و $(C_g)$ .

**20** - $f$ دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+2+Ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$ .

1) برهن ان الدالة $f$ متزايدة تماما على $I$

2) أ) برهن ان المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $(+\infty)$

ب) عين وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ ثم ارسم $(C_f)$ و $(d)$.

**21** - نعتبر الدالة $h$ المعرفة بالعبارة $h(x)=x^2+1-Ln\, x$

1) ادرس تغيرات الدالة $h$ ثم بين ان $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ و استنتج إشارة $h(x)$

2) لتكن $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+\frac{Ln\, x}{x}$

أ) احسب $f'(x)$ ثم بين ان $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ على $]0,+\infty[$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

ج) احسب نهاية $f$ عند $(+\infty)$ و عند الصفر ثم شكل جدول تغيرات $f$ .

3) أ) برهن أن المستقيم $(d)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$

ب) حدد وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ ثم ارسم $(C_f)$ و $(d)$ .

---

**22** - $f$ دالة معرفة على $I=]2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+2+Ln(x^2-4)$

1) برهن أن $f$ متزايدة تماما على $I$

2) أ) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha$ في المجال $I$

ب) عين حصرا لـ $\alpha$ بتقريب 0,1 .

---

**23** - $f$ دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم $(\gamma)$ .

2) لتكن $M_1$ ، $M_2$ ، $M_3$ ، $M_4$ نقط من $(\gamma)$ .

$M_1$ نقطة تقاطع $(\gamma)$ مع $(xx')$ .

$M_2$ نقطة من $(\gamma)$ بحيث المماس عندها يمر من المبدأ.

$M_3$ هي النقطة التي عندها المماس يوازي $(xx')$ .

$M_4$ هي النقطة التي عندها المشتق الثاني لـ $f$ ينعدم.

أ) احسب فواصل النقط $M_1$ ، $M_2$ ، $M_3$ ، $M_4$ .

ب) بين أن هذه الفواصل تمثل متتالية هندسية.

---

**24** - $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{Ln\,x}{x^2}$ . و $(\gamma)$ تمثيلها البياني

1) ادرس تغيرات $f$ مشكلا جدول تغيراتها.

2) أ) $A$ نقطة من $(\gamma)$ ذات الفاصلة 1 ، أوجد معادلة للمماس $(T)$ لـ $(\gamma)$ عند $A$

ب) ارسم $(T)$ ثم $(\gamma)$ .

3) $M$ نقطة من $(\gamma)$ فاصلتها $u$ . بين أن المماس $(Tu)$ لـ $(\gamma)$ عند النقطة $M$ يوازي المستقيم ذي المعادلة $y=x$ إذا و فقط إذا كان $u^3-1+2\,Ln(u)=0$ ... $(I)$

4) بعد حل المعادلة $(I)$ بين أن النقطة $A$ هي النقطة الوحيدة من $(\gamma)$ المماس فيها يكون موازي للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ .

---

**25** - $f$ دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2}\left(Ln(x)-\frac{3}{2}\right) & ; x\rangle 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أ) ما هي نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ لما $x$ يؤول 0

ب) استنتج أن $f$ قابلة للاشتقاق عند $x=0$ .





ج) ادرس تغيرات $f$ مشكلا جدول تغيراتها.

2) $(\gamma)$ المنحني البياني الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس وحدة الطول 2cm.

أ) أوجد معادلة المماس $(T)$ لـ $(\gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب) نريد في هذا السؤال دراسة الوضعية النسبية لـ $(\gamma)$ و $(T)$ .

لتكن $h$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $h(x)=f(x)+x-\frac{1}{4}$ .

ادرس إشارة $h''(x)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$ ثم $h(x)$ على $]0,+\infty[$ .

3) ارسم $(T)$ و المماسات عند نقط تقاطع $(\gamma)$ مع محور الفواصل و كذا $(\gamma)$ .

---

**26** - $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x^2+x-\frac{1+Ln\,x}{x}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد.

1) $g$ دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=2x^3+x^2+Ln\,x$ .

ادرس تغيرات $g$ على $I$ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ و أوجد العدد الطبيعي $p$ بحيث $(P+1)\;10^{-2}\ge\alpha\ge P\;10^{-2}$

2) عين نهاية $f$ عند أطراف $I$ .

أ) بين أنه من أجل كل $x$ من $I$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ . ادرس تغيرات الدالة $f$ مشكلا جدول تغيراتها.

ب) $h$ دالة معرفة على $I$ بالعبارة $h(x)=x^2+x$ و $(p)$ منحناها البياني.

ما هي نهاية $f(x)-h(x)$ عند $(+\infty)$ ؟ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ $(\gamma)$ و $(p)$ .

ارسم $(p)$ و $(\gamma)$ .

---

**27** - I ) $g$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-Ln\,x$ .

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ .

2) احسب $g(1)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]0,+\infty[$ ثم أعط حصرا لـ $\alpha$ بتقريب 0,01.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$ .

II ) تعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{2\,Ln\,x}{x^2+x}$ و ليكن $(\gamma)$ التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

1) ادرس نهاية $f$ عند الصفر و $(+\infty)$ .

2) بين أنه من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ يكون $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x)$

ثم استنتج إشارة $f'(x)$ . أنشئ جدول تغيرات $f$ .

4) باستعمال السؤال 2) من I) بين ان $Ln(\alpha)=\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ و $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$
ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$ ثم ارسم $(\gamma)$

---

**28** - $k$ عدد حقيقي، نعتبر الدالة $f_k$ المعرفة على $]0,1]$ بـ $f_k(x)=x(Ln\,x)^2+kx$
و $(\gamma_k)$ منحناها البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

I) نضع $k=0$.

1) عين اتجاه تغير الدالة $f_0$.

2) ا) احسب $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{Ln\,u}{\sqrt{u}}$ ثم $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(Ln\,u)^2}{u}$

ب) استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}x(Ln\,x)^2=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to 0}f_0(x)$.

جـ) بوضع $f_0(0)=0$ هل الدالة $f_0$ المعرفة بهذا الشكل قابلة للاشتقاق عند الصفر؟

د) عين نهاية النسبة $\frac{f_0(x)}{x}$ لما $x$ يؤول إلى الصفر ثم استنتج معادلة المماس عند النقطة $O(0,0)$ للمنحني $(\gamma_0)$ ثم ارسم $(\gamma_0)$.

II) 1) ا) احسب $f_k'(x)$ من اجل $x\in]0,1]$.

ب) $A_k$ نقطة من $(\gamma_k)$ فاصلتها 1 بين ان المماس $(T_k)$ لـ $(\gamma_k)$ عند $A_k$ هو $(OA_k)$

2) ا) ادرس نهاية $f_k$ عند الصفر و هنا باخذ $f_k(0)=0$.

ب) اوجد معادلة المماس لـ $(\gamma_k)$ عند النقطة $O$.

---

**29** - I) $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x\,Ln\,x}{x+1}$

1) لتكن $g$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=Ln(x)+x+1$.
ادرس تغيرات $g$ ثم بين ان المعادلة $g(x)=0$ لها حلا وحيدا $\beta$ بحيث $0,28\geq\beta\geq 0,27$.

2) ا) من اجل كل $x\rangle 0$ اكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ مستنتجا تغيرات $f$.

ب) عين نهاية الدالة $f$ عند أطراف $]0,+\infty[$.

II) نعتبر المعادلة (I) ... $f(x)=n$ و $n$ عدد طبيعي غير معدوم.

1) بين ان المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$.

2) ا) بين ان $f(e^n)\leq n$ ثم استنتج أن $\alpha_n\geq e^n$

ب) بين أن العلاقة $f(\alpha_n)=n$ تكتب على الشكل $Ln(\frac{\alpha_n}{e^n})=\frac{n}{\alpha_n}$ ..... (2)

ثم استنتج باستعمال السؤال (ا) نهاية $\frac{\alpha_n}{e^n}$ لما $n$ يؤول الى $(+\infty)$

3) نكتب $\alpha_n=e^n(1+\varepsilon_n)$ مع $\varepsilon_n\geq 0$.





ا) باستعمال المساواة (2) اكتب $(1+\varepsilon_n)Ln(1+\varepsilon_n)$ بدلالة $n$.

ب) بين انه من اجل $t\geq 0$ يكون $0\leq(1+t)Ln(1+t)-t\leq\frac{t^2}{2}$

جـ) استنتج من (ا) و (ب) انه من أجل كل $n\geq 1$ يكون
$\varepsilon_n\leq ne^{-n}\leq\varepsilon_n+\frac{(\varepsilon_n)^2}{2}$ ... (3).

د) من (2) و (3) عين نهاية $e^n+n-\alpha_n$ لما $n$ يؤول الى $(+\infty)$.

---

**30** - $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_0=0$ و من أجل $n\geq 0$ يكون $U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n}$.

1) احسب $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ و عبر عن هذه الحدود بواسطة كسر غير قابل للاختزال.

2) قارن بين الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية بالنسبة إلى الحدود الأربعة الأولى لـ $(V_n)$ المعرفة بـ $V_n=\frac{n}{n+1}$.

3) باستعمال البرهان بالتراجع بين انه من اجل كل $n\geq 0$ يكون $U_n=V_n$.

4) $(W_n)$ متتالية معرفة بـ $W_n=Ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

ا) بين أن $W_1+W_2+W_3=-Ln(4)$.

ب) $S_n$ المجموع المعرف بـ $S_n=W_1+W_2+...+W_n$.
اكتب $S_n$ بدلالة $n$ ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

---

**31** - نريد دراسة تقارب المتتالية $S_n=1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n-1}-Ln\,n$

1) ادرس تغيرات الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $[1,+\infty[$ بـ
$f(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x}$ و $g(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$
ثم استنتج ان $\frac{1}{x+1}\leq Ln(x+1)-Ln(x)\leq\frac{1}{x}$

2) نضع $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

ا) تحقق انه من اجل $n\geq 1$ يكون $U_{n+1}-1\leq Ln(n+1)\leq U_n$

ب) استنتج ان $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$.

3) ا) لتكن الدالة $K$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $K(x)=\frac{1}{x}-Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.
فسر هندسيا العدد $S_n$ حيث $S_n=U_{n-1}-Ln\,n$.

ب) من السؤال (1) استنتج انه من اجل كل $n\geq 1$ يكون $0\leq K(n)\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

جـ) تحقق انه من اجل كل $n\geq 2$ يكون $S_n=K(1)+K(2)+....+K(n-1)$.

ثم استنتج ان المتتالية $(S_n)$ متزايدة ومن اجل كل $n \ge 2$ يكون $1-\frac{1}{n} < S_n < K(1)$ .

د) استنتج من جـ) أن $(S_n)$ متقاربة نحو $\ell$ يطلب تعيينه.

**32** - بعد قياس طول أطفال أعمارهم تتراوح ما بين 3 أشهر و 6 سنوات نمذجنا العلاقة بين السن $x$ بالسنوات و الطول $K(x)$ ( cm ) بالدالة $K$ التالية :

$$K(x)=71,23+6,13\,x+8,7\,Log\,x$$

أ) ادرس تغيرات الدالة $K$ على المجال $[0,25 \,;\, 6]$ .

ب) ما هي الزيادة في الطول ما بين سنة و سنتين ؟

جـ) ارسم المنحنى البياني للدالة $K$ في المجال $[0,25 \,;\, 6]$ .

**33** - نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $IR$ بـ $\begin{cases} f(x)=(|x|)^x \ , & x \neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) بين ان هذه الدالة مستمرة على $IR$ و قابلة للاشتقاق على $IR-\{0\}$ .

2) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم ارسم منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

**34** - نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $IR_+^*$ بـ $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ .

1) ادرس تغيرات الدالة $f$ .

2) عين معادلة المماس $(T)$ لـ $(\gamma)$ في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ارسم $(\gamma)$ و $(T)$

**35** - $n$ عدد طبيعي غير معدوم و $f_n$ الدوال المعرفة على $IR$ بـ $f_n(x)=x^n e^{-x}$ و $(\gamma_n)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

I) 1) ادرس تغيرات الدوال $f_1$ ، $f_2$ ، $f_3$ مع إعطاء العدد المشتق عند الصفر.

2) بين ان جميع المنحنيات $(\gamma_n)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعينها.

3) ادرس تغيرات الدوال $f_n$ في حالة $n$ زوجي و في حالة $n$ فردي.

4) قارن بين الوضع النسبي لـ $(\gamma_n)$ و $(\gamma_{n+1})$ على $]0,+\infty[$ و $(\gamma_n)$ و $(\gamma_{n+2})$ على $]-\infty,0]$ و مثل عندئذ $(\gamma_1)$ ، $(\gamma_2)$ ، $(\gamma_3)$ في نفس المعلم.

II) 1) من أجل كل $x>0$ نضع $u(x)=x\,Ln(x)-x$ ادرس تغيرات $u$ .

2) $g$ دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $\begin{cases} g(x)=e^{u(x)} \ , & x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

أ) تحقق انه من أجل كل $x>0$ يكون $\frac{g(x)-1}{x}=\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)} \times (Ln(x)-1)$ .

ب) بين أن الدالة $g$ مستمرة عند الصفر و لكن غير قابل للاشتقاق عند 0.

جـ) ادرس تغيرات $g$ .





د) احسب $g(e)$ ثم حل المتراجحة $g(x) \ge 1$ في المجال $]0,+\infty[$ .

3) من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$ نسمي $M_n$ النقطة ذات إحداثيتي $(n \,,\, f_n(n))$ .

أ) تحقق أن النقطة $M_n$ نقطة من المنحني البياني للدالة $g$ ثم ارسم هذا المنحني.

4) عين حسب قيم $n$ عدد حلول المعادلة $f_n(x)=1$ على $IR$ .

**36** - $n$ عدد طبيعي و $f_n$ دالة معرفة على $[0,1]$ بـ $f_n(x)=x^{n+\frac{1}{2}} \times (1-x)^{\frac{1}{2}}$ ، $(\gamma_n)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) بين ان $(\gamma_0)$ نصف دائرة نصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ و مركزها $\omega$ يطلب تعيينه.

2) في هذا السؤال نفرض ان $n \ge 1$

أ) من أجل كل $x$ من $]0,1[$ احسب $f'_n(x)$ مبينا ان $f'_n(x)$ و $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x\right]$ لهما نفس الإشارة.

ب) هل الدالة $f_n$ قابلة للاشتقاق عند الصفر و الواحد. شكل جدول تغيرات $f_n$ .

3) أ) ادرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ لما $0 \le x \le 1$ و $n \ge 1$

ب) استنتج الوضعية النسبية للمنحنيات $(\gamma_n)$ و $(\gamma_{n+1})$ .

جـ) ارسم في المعلم $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ المنحنيات $(\gamma_1)$ ، $(\gamma_2)$ ، $(\gamma_0)$

الدرس 6



# النهايات والمتتاليات

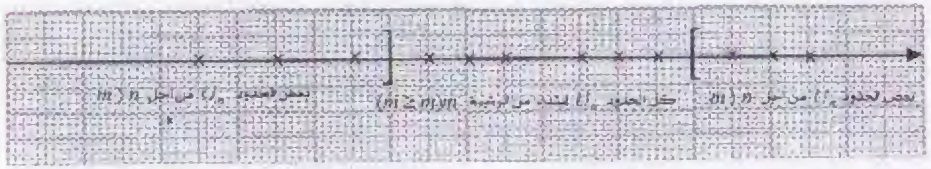
## 1 - نهاية متتالية (تذكير)

### 1 - 1 نهاية حقيقية لمتتالية عددية

**تعريف**

نقول أن العدد الحقيقي $\ell$ نهاية لمتتالية $(U_n)$ يعني أن كل مجال مفتوح مركزه $\ell$ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة ونكتب:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ أو $\lim U_n = \ell$ و في هذه الحالة نقول أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة.



**ملاحظة**

1) إذا كانت $(U_n)$ متقاربة فإن نهايتها وحيدة

2) إذا كانت $(U_n)$ متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة)

3) كل متتالية حدودها موجبة لها نهاية موجبة أو معدومة.





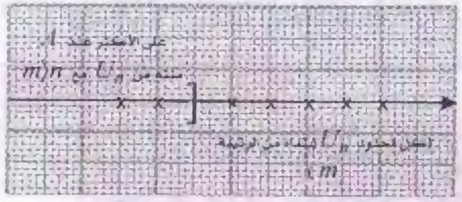
**مثال -**

المتتاليات المعرفة بـ $U_n = \frac{1}{n}$ ، $V_n = \frac{1}{n^2}$ ، $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متتاليات متقاربة نحو الصفر لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Vn = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

### 1 - 2 نهاية غير منتهية لمتتالية عددية

نقول أن متتالية $(U_n)$ تقبل نهاية $(+\infty)$ يعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]A, +\infty[$ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة و نكتب:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$



ويعني ذلك أن حدود المتتالية $(U_n)$ تنتهي بتجاوز أي عدد حقيقي $A$ مهما كان كبيرا.

**ملاحظة**

الكتابة $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ تعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]-\infty, A[$ يشمل كل حدود المتتالية $(U_n)$ ابتداء من رتبة معينة.

**مثال -**

المتتاليات $U_n = n^2$ ، $V_n = n^3$ ، $W_n = \sqrt{n}$ ، $S_n = \sqrt{n+1}$ متتالية لها النهاية $(+\infty)$ و بالتالي فهي متباعدة.

### 1 - 3 دراسة تقارب متتالية هندسية

دراسة تقارب متتالية هندسية كيفية ذات الحد العام $a\,q^n$ يقودنا إلى دراسة تقارب المتتالية الهندسية ذات الحد العام $q^n$.

**مبرهنة**

$q$ عدد حقيقي

- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- إذا كان $q=0$ أو $q=1$ فإن المتتالية $q^n$ ثابتة
- إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- إذا كان $q \leq -1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة.

مثال -

1) لتكن $U_n = 5\left(\frac{-3}{4}\right)^n$

بما ان $-1 < \frac{-3}{4} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n = 0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو الصفر.

2) لتكن $V_n = 2\times 3^n$

بما ان $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ و منه $(V_n)$ متتالية متباعدة.

**تمرين تدريبي 1**

$(U_n)$ متتالية معرفة بالعبارة $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$ نهايتها 2 أوجد عدد طبيعي $m$ بحيث لما $n > m$ كل الحدود $U_n$ تنتمي إلى المجال $I = ]1{,}99 ; 2{,}01[$

✓ الحل

الحدود $U_n$ تنتمي إلى المجال $]1{,}99 ; 2{,}01[$ يعني ان $1.99 < \frac{2n+3}{n+2} < 2.01$ و بطرح 2 من حدود هذه الأخيرة نجد $-0.01 < \frac{2n+3}{n+2} - 2 < 0.01$ اي $-0.01 < \frac{-1}{n+2} < 0.01$ و بالضرب في $(-1)$ نجد $-10^{-2} < \frac{1}{n+2} < 10^{-2}$ و بالضرب في $(n+2)10^2$ نجد

$-(n+2) < 10^2 < n+2$ ..... $(I)$

المتباينة $-(n+2) < 10^2$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$ إذن المتباينة المضاعفة $(I)$ تكافئ $n+2 > 10^2$ اي $n > 98$ منه نستنتج ان $m = 98$

بالتالي المجال $]1.99 , 2.01[$ يشمل كل حدود المتتالية $(U_n)$ ابتداء من الرتبة 98 .

**تمرين تدريبي 2**

ادرس تقارب المتتاليات $U_n = \frac{3}{4^n}$ ، $V_n = 5(\sqrt{2})^n$ ، $W_n = \frac{(-4)^n}{5}$ ، $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$

✓ الحل

نلاحظ ان $(U_n)$ ، $(V_n)$ ، $(W_n)$ متتاليات هندسية

- بما ان $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ و منه $\lim U_n = 0$ إذن $(U_n)$ متقاربة نحو الصفر.
- بما ان $\sqrt{2} > 1$ فإن $\lim (\sqrt{2})^n = +\infty$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ إذن $(V_n)$ متتالية متباعدة.





- بما ان $-4 \le -1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} (-4)^n$ غير موجودة و منه المتتالية $(W_n)$ متباعدة.
- $(U_n)$ متتالية هندسية بالتالي $S_n$ مجموع $n$ حد الأولى المتعاقبة من متتالية $(U_n)$ حدها الأول $U_0 = 3$ و اساسها $\frac{1}{4}$ .

إذن $S_n = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

- بما ان $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ و منه المتتالية $(S_n)$ متقاربة نحو العدد 4 .

## 2 - نظريات حول النهايات

### 2 - 1 المتتاليات من الشكل $U_n = f(n)$

مبرهنة

$f$ دالة معرفة على مجال $]a , +\infty[$ و $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_n = f(n)$

و $\ell$ يمثل عددا حقيقيا او $+\infty$ او $-\infty$

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

مثال -

$U_n = \frac{2}{n+1}$ ، الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x) = \frac{2}{x+1}$ نهايتها الصفر لما $x \to +\infty$

و عليه فالمتتالية $(U_n)$ نهايتها 0 .

### 2 - 2 المتتاليات من الشكل $U_n = f(V_n)$

مبرهنة

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ و كل حدود متتالية $(V_n)$ تنتمي الى $I$ .

$\alpha$ ، $\beta$ عددان حقيقيان او يمثلان $+\infty$ او $-\infty$

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} V_n = \alpha$ و إذا كانت $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ فإن $\lim_{n\to+\infty} f(V_n) = \beta$

مثال -

$(V_n)$ متتالية معرفة بـ $V_n = \sqrt{3+\frac{1}{n+1}}$

بوضع $U_n = 3+\frac{1}{n+1}$ تصبح $V_n = \sqrt{U_n}$ و بالتالي $V_n = f(U_n)$ حيث $f(x) = \sqrt{x}$

بما ان $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$ و $\lim_{x\to3} f(x) = \sqrt{3}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{3}$

**نتيجة**

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_{n+1} = f(U_n)$

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ و $f$ مستمرة عند $\ell$ فإن $\ell = f(\ell)$ ( $\ell$ حل لـ $x = f(x)$ )

**الإثبات**

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ و إذا كانت $f$ مستمرة عند $\ell$ ( $\lim_{x\to\ell} f(x) = \ell$ ) في المبرهنة السابقة تسمح لنا بالتأكيد أن $\lim_{n\to+\infty} f(U_n) = f(\ell)$ .

و من جهة أخرى المتتالية $(U_{n+1})$ نهايتها $\ell$ لأن حدودها هي نفس حدود المتتالية $(U_n)$ ما عدا $U_0$

و بما انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_{n+1} = f(U_n)$

فإن المتتاليتين $(U_{n+1})$ و $f(U_n)$ متساويتان و بالتالي لهما نفس النهاية أي $\ell = f(\ell)$

**مثال -**

$(U_n)$ متتالية متقاربة معرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ $\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{3+U_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

أوجد $\lim_{n\to+\infty} U_n$



✓ الحل

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{3+x}$ و منه $U_{n+1} = f(U_n)$

بما ان $(U_n)$ متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ و $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$ و $\ell \in \mathbb{R}$

و بما أن $f$ مستمرة عند $\ell$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = f(\ell)$

إذن $\ell$ هو جذر للمعادلة $x = f(x)$ .

$x = f(x)$ يكافئ $x^2 - x - 3 = 0$ و $x \geq 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13$

$\Delta > 0$ و منه المعادلة $x^2 - x - 3 = 0$ لها حلان هما $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ و $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

بما ان $x_2 < 0$ فإنه مرفوض و بالتالي $\ell = x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

## 2 - 3 نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

القواعد المتعلقة بنهايات الدوال عند $(+\infty)$ تبقى صحيحة بالنسبة إلى المتتاليات وخاصة نهاية الجمع و الجداء و حاصل قسمة متتاليتين .

أما بالنسبة إلى نهاية المتتالية باستعمال الحصر لدينا المبرهنات التالية:





**مبرهنة 1**

$(U_n)$ ، $(V_n)$ ، $(W_n)$ ثلاث متتاليات عددية ، $\ell$ عدد حقيقي.

إذا كان ابتداء من عدد طبيعي $m$ لدينا $W_n \le U_n \le V_n$

و إذا كانت $\lim W_n = \lim V_n = \ell$

فإن $\lim U_n = \ell$

**مبرهنة 2**

$\ell$ عدد حقيقي. إذا كان ابتداء من عدد طبيعي $m$ لدينا $|U_n - \ell| \le V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

**مبرهنة 3**

$(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان عدديتان

- إذا كان من أجل كل $n \ge m$ لدينا $U_n \ge V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

- إذا كان من أجل كل $n \ge m$ لدينا $U_n \le V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

**تمرين تدريبي 1**

ادرس تقارب المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $U_n = \frac{2n+\cos n}{2n-\sin n}$

✓ الحل

- من أجل كل عدد طبيعي لدينا $-1 \le \cos n \le 1$

إذن $-1+2n \le 2n+\cos n \le 1+2n$ ......................(1)

- من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $-1 \le \sin n \le 1$

إذن $-1+2n \le 2n-\sin n \le 1+2n$

و بما ان حدود المتباينة المزدوجة موجبة فإنه نستنتج بالقلب

$\frac{1}{1+2n} \le \frac{1}{2n-\sin n} \le \frac{1}{-1+2n}$ ..........................(2)

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد ،

$\frac{-1+2n}{1+2n} \le \frac{2n+\cos n}{2n-\sin n} \le \frac{1+2n}{-1+2n}$

و بما ان $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2n}{-1+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+2n}{1+2n} = 1$ فإنه حسب نظرية الحصر $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

### تمرين تدريبي 2

$(V_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $V_0=1$ و $V_{n+1}=\sqrt{V_n+6}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $0\le V_n\le 3$

ب) ادرس تقارب المتتالية $(U_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=\dfrac{V_n}{n+2}$

✓ الحل

1) نسمي $p_n$ الخاصية " $0\le V_n\le 3$ "

- $p_0$ صحيحة لأن $V_0=1$ و $0\le 1\le 3$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n\ge 0$ أي $0\le V_n\le 3$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة اي $0\le V_{n+1}\le 3$

من الفرض لدينا $0\le V_n\le 3$ و بإضافة 6 إلى حدود هذه المتباينة نجد $3\le V_n+6\le 9$

بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{3}\le\sqrt{V_n+6}\le 3$ اي $0\le\sqrt{3}\le V_{n+1}\le 3$ ومنه $p_{n+1}$ صحيحة.

إذن $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$ .

ب) بما ان $0\le V_n\le 3$ فإن $0\le\dfrac{V_n}{n+2}\le\dfrac{3}{n+2}$

و بما ان $\lim \dfrac{3}{n+2}=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{V_n}{n+2}=0$

و عليه فالمتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو الصفر.

### تمرين تدريبي 3

ادرس تقارب المتتالية $(V_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعبارة : $V_n=3^{n+2}-5^n$

✓ الحل

المتتاليتان اللتان حداهما العام $5^n$ و $3^{n+2}$ هندسيتان أساساهما على الترتيب 5 و 3.

و بما ان $5\rangle 1$ و $3\rangle 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n=\lim\limits_{n\to+\infty}3^{n+2}=+\infty$ و بالتالي نستنتج :

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين.

$V_n$ يكتب $V_n=3^n(3^2-\dfrac{5^n}{3^n})=3^n(9-(\dfrac{5}{3})^n)$

بما ان $\dfrac{5}{3}\rangle 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{5}{3})^n=+\infty$ و منه نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[9-(\dfrac{5}{3})^n\right]=-\infty$





و بما ان $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ فإنه حسب قاعدة نهاية جداء متتاليتين نستنتج :

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}3^n\times(9-(\dfrac{5}{3})^n)=-\infty$ و عليه $(V_n)$ متباعدة.

## 3 - تقارب المتتاليات الرتيبة

### 3 - 1 متتالية محدودة (من الأعلى - من الأسفل)

- القول ان المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى يعني انه يوجد عدد حقيقي $M$ بحيث أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_n\le M$ .

يسمى $M$ عنصرا حادا من الأعلى للمتتالية $(U_n)$

- القول ان المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأسفل يعني انه يوجد عدد حقيقي $m$ بحيث انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_n\ge m$ .

يسمى $m$ عنصرا حادا من الأسفل.

- إذا كانت $(U_n)$ محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها محدودة.

**ملاحظة**

1) إذا كانت متتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى بالعدد $M$ فإن كل الأعداد الحقيقية الأكبر من $M$ هي ايضا عناصر حادة لـ $(U_n)$ .

نعرف بنفس الكيفية العناصر الحادة من الأسفل.

2) نفي القضية " المتتالية $(U_n)$ غير محدودة من الأعلى " يعني انه من اجل كل عدد حقيقي $A$ كبير بالقدر الكافي نستطيع أن نجد حد $U_{n_0}$ بحيث $U_{n_0}\rangle A$ .

**مثال -**

1) المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ $U_n=\sin n$ محدودة لأنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $-1\le\sin n\le 1$

2) المتتالية $V_n=(-1)^n\cos n$ محدودة لأنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $-1\le V_n\le 1$

3) المتتالية $W_n=-n^2$ محدودة من الأعلى لأنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $W_n\le 0$

### 3 - 2 تقارب المتتالية الرتيبة

- المتتالية $(U_n)$ متزايدة إذا و فقط إذا كان من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_n\le U_{n+1}$

- المتتالية $(U_n)$ متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_n \geq U_{n+1}$
- المتتالية $(U_n)$ رتيبة إذا و فقط إذا كانت متزايدة أو إذا كانت متناقصة.

**مثال -**

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_n = -n^2+n+1$

من أجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} = -n^2-n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_{n+1}-U_n = -2n$

من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ يكون $-2n \leq 0$ أي $U_{n+1}-U_n \leq 0$ و بالتالي $(U_n)$ متناقصة.

**مبرهنة 1**

1) كل متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى نهايتها $(+\infty)$
2) كل متتالية متناقصة و غير محدودة من الأسفل نهايتها $(-\infty)$

**الإثبات**

نثبت القسم الأول من المبرهنة (1).

لتكن $(U_n)$ متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى،

- $(U_n)$ غير محدودة من الأعلى هذا يعني أنه مهما يكن العدد الحقيقي $A$ كبير بالقدر الكافي، نستطيع أن نجد حد $U_p$ من المتتالية $(U_n)$ بحيث $U_p > A$ .............. (1)
- $(U_n)$ متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ بحيث $n > p$ يكون $U_n \geq U_p$ ..... (2)

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل $n > p$ يكون $U_n > A$

و هذا يعني أنه ابتداء من الرتيبة $P$ كل حدود المتتالية $(U_n)$ تنتمي إلى مجال $]A, +\infty[$

مما يعني أن نهاية $(U_n)$ هي $+\infty$

**مبرهنة 2**

1) كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة
2) كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

**الإثبات**

1) بما أن المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى فإنه يوجد عدد حقيقي $M$ بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n \leq M$، عندئذ يوجد عدد حقيقي $A$ و هو أصغر العناصر الحادة لـ $U_n$.

و عليه فكل مجال من الشكل $]A-\alpha, A+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$ يشمل على الأقل حد $U_p$ من المتتالية $(U_n)$.

لأنه إذا كان هذا المجال لا يشمل أي حد $U_p$ فإن كل الحدود $U_n$ تقع على يسار $A-\alpha$ و هذا يعني أن $A-\alpha$ عنصر حاد لـ $(U_n)$ مما يخالف الفرض كون $A$ هو أصغر العناصر الحادة الكبرى لـ $(U_n)$.





و بما أن المتتالية $(U_n)$ متزايدة و كل الحدود $(U_n)$ أصغر من $A$ فإن المجال $]A-\alpha, A+\alpha[$ يشمل حدود المتتالية $(U_n)$ ابتداء من الرتيبة $p$ و هذا صحيح من أجل كل $\alpha$ (أي من أجل كل مجال مركزه $A$).

إذن المتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو العدد الحقيقي $A$.

2) نبين بنفس الطريقة أن كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل متقاربة.

**ملاحظة**

هذه المبرهنة تسمح لنا بمعرفة تقارب متتالية و لكن لا تعطينا قيمة نهايتها.

**تمرين تدريبي 1**

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة $U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}$ و $U_0=1$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $0 < U_n \leq 2$
2) بين أن المتتالية $(U_n)$ متزايدة ثم استنتج تقاربها واحسب نهايتها.

**✓ الحل**

1) نسمي $p_n$ الخاصية "$0 < U_n \leq 2$"

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0=1$ و $0 < 1 \leq 2$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $0 < U_n \leq 2$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $0 < U_{n+1} \leq 2$

من الفرض لدينا $0 < U_n \leq 2$ و بإضافة 2 إلى حدود هذه الأخيرة نجد $2 < U_n+2 \leq 4$

و بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{2} < \sqrt{U_n+2} \leq 2$ أي $0 < \sqrt{2} < U_{n+1} \leq 2$

و منه $p_{n+1}$ صحيحة إذن $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

من المتباينة $0 < U_n \leq 2$ نستنتج أن $(U_n)$ محدودة من الأعلى.

2) $(U_n)$ متزايدة هذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_{n+1}-U_n \geq 0$.

$$U_{n+1}-U_n = \sqrt{2+U_n}-U_n = \frac{(\sqrt{2+U_n}-U_n)(\sqrt{2+U_n}+U_n)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$$

$$= \frac{2+U_n-U_n^2}{\sqrt{2+U_n}+U_n} = \frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$$

بما أن $0 < U_n \leq 2$ فإن $U_n+1 > 0$ و $U_n-2 \leq 0$ و بالتالي:

$\frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{\sqrt{2+U_n}+U_n} \geq 0$ أي $U_{n+1}-U_n \geq 0$ مما يدل على أن $(U_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$

- بما أن $(U_n)$ متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي $\ell$.

$\ell$ جذر للمعادلة $x=f(x)$ حيث $f(x)=\sqrt{2+x}$

$x = f(x)$ يكافئ $x^2 - x - 2 = 0$

يكافئ $x = 2$ او $x = -1$

وبما ان حدود للتالية موجبة فإن نهايتها موجبة و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$

### تمرين تدريبي 2

$(U_n)$ متتالية معرفة على $IN$ بـ $u_0 = 2$ و بالعلاقة $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3 + 2U_n}$

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n > 0$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f : x \to \dfrac{x}{3+2x}$ على $]0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير $(U_n)$

3) بين أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم استنتج نهايتها.

✓ الحل

1) نسمي $p_n$ الخاصية "$U_n > 0$"

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0 = 2$ و $2 > 0$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة أي $U_n > 0$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $U_{n+1} > 0$

لدينا $U_n > 0$ فرضا

و بضرب طرفي المتباينة في 2 نجد $2U_n > 0$ و بإضافة 3 نجد $3 + 2U_n > 3 > 0$

إذن $U_{n+1} > 0$ منه $p_{n+1}$ صحيحة

و بالتالي $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

2) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأن $]0, +\infty[ \subset D_f$

و من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f'(x) = \dfrac{3}{(2+3x)^2}$ إذن $f'(x) > 0$

وبالتالي $f$ دالة متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ .

إذا كان $U_{n+1} = f(U_n)$ و $f$ متزايدة فإن المتتالية $(U_n)$ رتيبة لكن $U_1 = \dfrac{2}{7}$ و

$U_1 - U_0 \leq 0$

إذن يمكن أن نخمن ان $(U_n)$ متناقصة.

نبرهن بالتراجع ان $(U_n)$ متناقصة.

نسمي $p_n$ الخاصية "$U_{n+1} \leq U_n$"

- من اجل $n = 0$ : $p_0$ صحيحة لأن $U_1 - U_0 \leq 0$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ اي $U_{n+1} \leq U_n$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$







من الفرض لدينا $U_{n+1} \leq U_n$

و بما ان $f$ متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ فإن $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

اي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$ و منه $p_{n+1}$ صحيحة.

إذن من اجل كل عدد طبيعي $n$ تكون $p_n$ صحيحة.

3) بما ان $(U_n)$ محدودة من الأسفل و متناقصة فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي $\ell$ حيث $\ell$ جذر للمعادلة $x = f(x)$

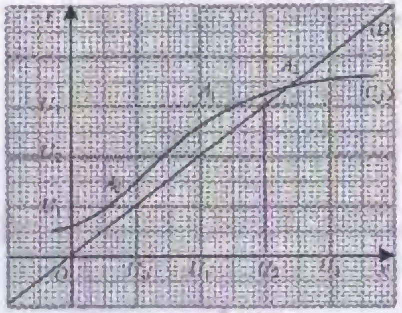
$x = f(x)$ تكافئ $x = \dfrac{x}{3+2x}$

يكافئ $(x = 0)$ او $(x = -1)$

بما ان $x \geq 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

## 4 - متتاليات من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$

### 4 - 1 التمثيل البياني للمتتالية $(U_n)$



$(U_n)$ متتالية حدها الأول $U_0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

حيث $f$ دالة و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

نعلم العدد الحقيقي $U_0$ على محور الفواصل

ثم نعلم النقطة $A_0$ من $(C_f)$ ذات الفاصلة $U_0$ .

و الترتيبة $U_1 = f(U_0)$

نعلم $U_1$ على محور الفواصل حيث $U_1$

هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $(D) : y = x$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = U_1$ .

النقطة $A_1$ ذات الفاصلة $U_1$ و الترتيبة $U_2 = f(U_1)$ الناتجة من تقاطع $x = U_1$ مع $(C_f)$

نعلم العدد $U_2$ على محور الفواصل كما في الحالة السابقة و هكذا دواليك.

**مثال -**

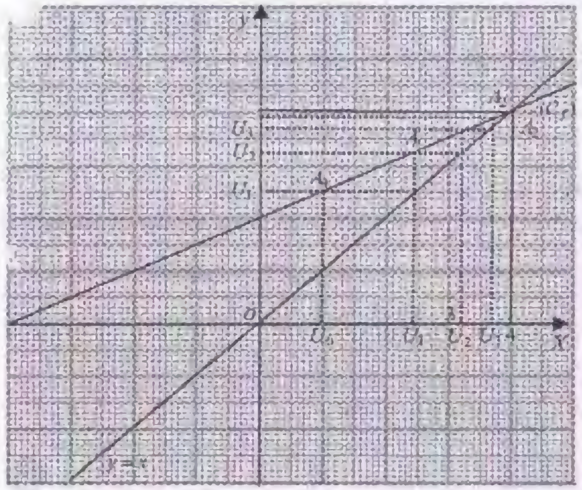
مثل بيانيا الحدود $U_0, U_1, U_2, U_3, U_n$ ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير و نهاية المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 2$ و $U_0 = 1$

✓ الحل

نرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين $(d)$ و $(\Delta)$ ذوي المعادلة $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ و $y = x$ على الترتيب.

- نعلم العدد الحقيقي $U_0$ على محور الفواصل ثم نعلم النقطة $A_0$ من $(d)$ ذات الفاصلة $U_0$ و ترتيبتها $U_1 = f(U_0)$ الناتجة من تقاطع $(d)$ مع المستقيم ذي المعادلة $x = U_0$ .
- نعلم $U_1$ على محور الفواصل حيث $U_1$ هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $y = U_1$ مع $(\Delta)$
- نعلم النقطة $A_1$ الناتجة من تقاطع المستقيم ذي المعادلة $x = U_1$ و $(d)$ .

ترتيبة النقطة $A_1$ هي $U_2 = f(U_1)$ .



- نعلم $U_2$ على محور الفواصل حيث $U_2$ هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y = U_2$ مع المستقيم $(\Delta)$ و هكذا نعلم حدود المتتالية $(U_n)$ .

نلاحظ من الشكل ان الحدود $U_0$ , $U_1$ , $U_2$ ...... تقترب من فاصلة نقطة تقاطع $(d)$ مع $(\Delta)$

و نلاحظ أيضا أن المتتالية $(U_n)$ متزايدة.

اي ان $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$ (لأن فاصلة نقطة التقاطع هي 4 )

## 4 - 2 دراسة المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ $U_{n+1} = aU_n + b$

نلاحظ ان $(U_n)$ معرفة بالشكل $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث $f(x) = ax + b$

• حالة $a = 1$ ،

$U_{n+1} = U_n + b$

- إذا كان $b = 0$ فإن $(U_n)$ ثابتة
- إذا كان $b \neq 0$ فإن $(U_n)$ متتالية حسابية أساسها $b$ فهي متباعدة.

• حالة $a \neq 1$ و $a \neq -1$

- لحساب الحد العام للمتتالية $(U_n)$ المعرفة بالعلاقة $U_{n+1} = aU_n + b$ نعرف متتالية $(V_n)$ حيث $V_n = U_n - \alpha$ و نختار $\alpha$ حتى تكون $(V_n)$ هندسية.

و دراسة تقارب المتتالية $(U_n)$ تؤول إلى دراسة تقارب $(V_n)$ .

بما ان $a \neq 1$ فإن للمستقيمين $(d): y = ax + b$ و $(D): y = x$ يتقاطعان في نقطة فاصلتها $\alpha$ .

• في حالة $a = -1$ يكون $U_{n+1} = -U_n + b$

$U_1 = -U_0 + b$ ، $U_2 = -U_1 + b = U_0$ ، $U_3 = -U_2 + b = U_1$





$U_4 = -U_3 + b = U_0$

نلاحظ أنه إذا كان $n$ زوجي فإن $U_n = U_0$ و إذا كان $n$ فردي $U_n = -U_0 + b$

- إذا كان $b = 0$ و $U_0 = 0$ فإن المتتالية $(U_n)$ معدومة
- إذا كان $U_0 \neq 0$ فإن $U_n = U_0$ لما $n$ زوجي

و $U_n = -U_0 + b$ إذا كان $n$ فردي

و بالتالي المتتالية $(U_n)$ ليست لها نهاية. إذن فهي متباعدة.

### مثال - ♦

لتكن $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$

و $(V_n)$ متتالية معرفة بـ $V_n = U_n - \alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

1) عين نقطة تقاطع المستقيمين $y = x$ و $y = -\frac{1}{2}x + 3$ و لتكن $\alpha$ فاصلتها.

2) أ) بين ان المتتالية $(V_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها.

ب) أوجد نهاية $(V_n)$ ثم استنتج نهاية $(U_n)$ .

### ✓ الحل

1) لتكن $M(x, y)$ نقطة تقاطع المستقيم $(D)$ : $y = x$ مع المستقيم $(d)$ : $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .

فاصلة النقطة $M$ تحقق $-\frac{1}{2}x + 3 = x$ تكافئ $x = 2$

إذن $\alpha = 2$ و هي القيمة المطلوبة.

2) أ) $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $q$ يكافئ $V_{n+1} = qV_n$

$$V_{n+1} = (-\frac{1}{2}U_n + 3) - 2 = -\frac{1}{2}(V_n + 2) + 3 - 2 = -\frac{1}{2}V_n - 1 + 3 - 2 = -\frac{1}{2}V_n$$

إذن $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = a = -\frac{1}{2}$

ب) بما أن $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = 1$

فإن $V_n = (-\frac{1}{2})^n$

و بما أن $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

من المساواة $V_n = U_n - 2$ نجد $U_n = V_n + 2$

و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

إذن $(U_n)$ متقاربة نحو 2 .

## 5 - المتتاليات المتجاورة

### 5 - 1 دراسة التقارب

مثال -

في الجدول الآتي تظهر في العمودين $B$ و $C$ ستة حدود لمتتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ على التوالي. في العمود $A$ يوجد دليل كل حد
نلاحظ أن $U_0=1$ و $V_0=12$.
حجزنا
- في الخلية $B_2$ = $(B1+2*C_1)/3$
- في الخلية $C_2$ = $(B1+3*C_1)/4$
- في الخلية $D_2$ $C_2-B_2$ .

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 12 | 11 |
| 2 | 1 | 8.333 | 9.250 | 0.91 |
| 3 | 2 | 8.9444 | 9.020825 | 0.07638 |
| 4 | 3 | 8.995364 | 9.001728 | 0.0006365 |
| 5 | 4 | 8.9995981 | 9.00013775 | 0.00053916 |
| 6 | 5 | 8.9999578 | 9.000002838 | 0.00004503 |

1) أعط عبارة $U_{n+1}$ و $V_{n+1}$ بدلالة $U_n$ و $V_n$
2) أعط تخمينا حول اتجاه تغير $(U_n)$ و $(V_n)$.
ما هو التخمين حول نهاية $(V_n-U_n)$ ؟
3) - لتكن $(W_n)$ متتالية حيث $W_n=3U_n+8V_n$ بين أن $(W_n)$ ثابتة.
- إذا فرضنا أن $(U_n)$ و $(V_n)$ تقتربان من نفس النهاية $\ell$ احسب القيمة الدقيقة لهذه النهاية باستعمال $(W_n)$.

✓ الحل

1) من المعطيات $U_2=\dfrac{U_1+2V_1}{3}$ و $V_2=\dfrac{U_1+3V_1}{4}$
و عليه عبارة $U_{n+1}$ و $V_{n+1}$ تظهر بـ $U_{n+1}=\dfrac{U_n+2V_n}{3}$ و $V_{n+1}=\dfrac{U_n+3V_n}{4}$

2) نلاحظ من الجدول أن المتتالية $(U_n)$ متزايدة و $(V_n)$ متناقصة. و نلاحظ أيضا أنه كلما كبر $n$ فإن $V_n-U_n$ تؤول إلى الصفر و منه يمكن أن نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$





3) إثبات أن $(W_n)$ ثابتة

$$W_{n+1}-W_n=(3U_{n+1}+8V_{n+1})-(3U_n+8V_n)$$
$$=3\left(\frac{U_n+2V_n}{3}\right)+8\left(\frac{U_n+3V_n}{4}\right)-3U_n-8V_n=0$$

و منه المتتالية $(W_n)$ ثابتة.
إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $W_n=W_0=3U_0+8V_0=99$
- بما أن $(U_n)$ و $(V_n)$ متقاربتان نحو نفس نهاية $\ell$ فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=3\lim_{n\to+\infty}U_n+8\lim_{n\to+\infty}V_n=3\ell+8\ell=11\ell$$

لكن $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=99$ إذن $11\ell=99$ ومنه $\ell=9$

### 5 - 2 تعريف

القول أن المتتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ متجاورتان يعني أن إحداهما متناقصة و الأخرى متزايدة.
و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=0$


مثال -

$U_n=2-\dfrac{1}{n+1}$ و $V_n=2+\dfrac{1}{n+1}$
المتتاليتان $(U_n)$ و $(V_n)$ متجاورتان لأن $(U_n)$ متناقصة و $(V_n)$ متزايدة
و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{n+1}=0$

**مبرهنة**

إذا كانت المتتاليتان $(U_n)$ و $(V_n)$ متجاورتين فإن كلتيهما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

**الإثبات**

لتكن المتتاليتان $(U_n)$ و $(V_n)$ حيث $(U_n)$ متزايدة و $(V_n)$ متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$
- نبرهن أولا أن $V_n\ge U_n$
- لتكن المتتالية $(W_n)$ المعرفة بـ $W_n=V_n-U_n$
- ندرس اتجاه تغير $(W_n)$

$$W_{n+1}-W_n=(V_{n+1}-U_{n+1})-(V_n-U_n)=(V_{n+1}-V_n)-(U_{n+1}-U_n)$$

بما أن $(U_n)$ متزايدة فإن $U_{n+1}-U_n\ge 0$
وبما أن $(V_n)$ متناقصة فإن $V_{n+1}-V_n\le 0$
ومنه نستنتج أن المتتالية $(W_n)$ متناقصة و تقترب من الصفر.
لنبرهن بالخلف أن كل حدودها موجبة.
نفرض أن أحد حدودها $W_p$ سالب تماما و لتكن قيمته $-a$ حيث $a\rangle 0$ .

المتتالية $(W_n)$ متناقصة إذن كل حدودها ابتداء من $W_p$ تكون أصغر من $-a$
وبالتالي المجال $]-a\,,a[$ لا يشمل كل حدود $(W_n)$ ابتداء من رتبة معينة و عليه المتتالية $(W_n)$ لا تؤول إلى الصفر وهذا يناقض الفرضية.
إذن كل حدود $(W_n)$ موجبة.
ومنه نستنتج أن $V_n - U_n \geq 0$ أي $V_n \geq U_n$ من أجل كل $n$ .
- نبين أن $(U_n)$ و $(V_n)$ متقاربتان
نعلم أن $V_n \geq U_n$ ولكن $(V_n)$ متناقصة و كل حدودها أصغر من $V_0$ وعليه من أجل كل $n$
$V_0 \rangle V_n \geq U_n$ مما يفسر أن $(U_n)$ محدودة من الأعلى.
المتتالية $(U_n)$ متزايدة و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة و لتكن $\ell$ نهايتها .
وبنفس الطريقة نبين أن $(V_n)$ محدودة من الأسفل بـ $U_0$ و متناقصة
فهي إذن متقاربة نحو $\ell'$ .
- نبين أن $\ell = \ell'$ :
نعلم أن $(U_n)$ و $(V_n)$ تقتربان على التوالي إلى $\ell$ و $\ell'$ و حسب القواعد العملية للنهايات نجد

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n - \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell - \ell'$$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ فإن $\ell - \ell' = 0$ أي $\ell = \ell'$

**خاصية**

كل عدد حقيقي يمكننا حصره بواسطة حدود متتابعة لمتتاليتين $(a_n)$ و $(b_n)$
بحيث المتتالية $(a_n)$ متزايدة و المتتالية $(b_n)$ متناقصة و $b_n - a_n = 10^{-n}$
هذا العدد الحقيقي هو النهاية المشتركة للمتتاليتين المتقاربتين للأعداد العشرية.

**الإثبات**

ليكن $x$ عدد حقيقي بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $b_n \rangle x \rangle a_n$
و $b_n - a_n = 10^{-n}$
إذا كانت $(a_n)$ متزايدة و $(b_n)$ متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$
فإن للمتتاليتين $(a_n)$ و $(b_n)$ متجاورتان و بالتالي تقتربان إلى نفس النهاية $\ell$
و بتطبيق نظرية الحصر نجد أن المتتاليتين تقتربان نحو $x$ .

**مثال -**

تعطي الآلة الحاسبة $\sqrt{2} = 1{,}41421356$ و منه يمكننا كتابة الحصر التالي :
- $2 \rangle \sqrt{2} \rangle 1$ إذن $b_0 \rangle \sqrt{2} \rangle a_0$ مع $a_0 = 1$ و $b_0 = 2$ و $b_0 - a_0 = 10^{-0} = 1$
- $1{,}5 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}4$ إذن $a_1 = 1{,}4$ و $b_1 = 1{,}5$ و $b_1 - a_1 = 0{,}1 = 10^{-1}$
- $1{,}42 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}41$ إذن $a_2 = 1{,}41$ $b_2 = 1{,}42$ و $b_2 - a_2 = 0{,}01 = 10^{-2}$
- $1{,}415 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}414$ إذن $a_2 = 1{,}414$ و $b_2 = 1{,}415$ و $b_2 - a_2 = 10^{-3}$





المتتالية 1 ، 1,4 ، 1,41 ، 1,414 ... متزايدة.
المتتالية 2 ، 1,5 ، 1,42 ، 1,415 ... متناقصة.
هاتان المتتاليتان لهما نهاية مشتركة $\sqrt{2}$ .

## تمرين تدريبي 1

لتكن $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان كما يلي :

$U_0 = 2$ ، $V_0 = 3$ ، $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$ ، $V_{n+1} = \frac{2U_n+3V_n}{5}$

1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $V_n - U_n \rangle 0$
2) بين أن المتتالية $(W_n)$ المعرفة بـ $W_n = V_n - U_n$ هي متتالية هندسية .
3) بين أن المتتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ متقاربتان.
4) أحسب $U_{n+1}+V_{n+1}$ بدلالة $U_n+V_n$ ثم ماذا يمكن القول عن المتتالية $(X_n)$ المعرفة بـ $X_n = U_n + V_n$ ثم استنتج النهاية المشتركة لـ $(U_n)$ و $(V_n)$.

## ✓ الحل

1) نسمي $p_n$ الخاصية " $V_n - U_n \rangle 0$ "
- $p_0$ صحيحة لأن $V_0 - U_0 = 3-2 = 1$ و $1 \rangle 0$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $V_n - U_n \rangle 0$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $V_{n+1} - U_{n+1} \rangle 0$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(2U_n+3V_n)-(3U_n+2V_n)}{5} = \frac{1}{5}(V_n - U_n)$$

إذن $V_{n+1} - U_{n+1} \rangle 0$ ومنه $p_{n+1}$ صحيحة وبالتالي $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$

2) $(W_n)$ متتالية هندسية أساسها $q$ يكافئ $W_{n+1} = qW_n$

$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{5}(V_n - U_n) = \frac{1}{5} W_n$ إذن $(W_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n+2V_n}{5} - U_n = \frac{2V_n - 2U_n}{5} = \frac{2}{5} W_n$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n+3V_n}{5} - V_n = \frac{2U_n-2V_n}{5} = -\frac{2}{5} W_n$$

بما أن $W_n = 1\times\left(\frac{1}{5}\right)^n \rangle 0$ فإن $U_{n+1}-U_n \rangle 0$ و $V_{n+1}-V_n \langle 0$
مما يدل على أن $(U_n)$ متزايدة و أن $(V_n)$ متناقصة.

و بما أن $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ و $W_n = V_n - U_n$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$
إذن $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان متجاورتان و بالتالي فهما متقاربتان.

4) $U_{n+1}+V_{n+1} = \frac{5U_n+5V_n}{5} = U_n+V_n$

إذن المتتالية $(X_n)$ ثابتة و عليه فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = U_0+V_0 = 5$

و من جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell+\ell = 2\ell$

إذن $2\ell = 5$ منه $\ell = \frac{5}{2}$

## 6 - حصر مقادير باستعمال المتتاليات المتجاورة

لتحديد مقدار مجهول $S$ (مساحة ، طول ، حجم ، عدد ... ) يتحتم علينا إيجاد حصر أكثر فأكثر دقة لـ $S$ بمقادير معلومة.

في المرحلة الأولى نحصل على $V_0 < S < U_0$

و في المرحلة الثانية $V_0 < V_1 < S < U_1 < U_0$

و في المرحلة $n$ نحصل على $V_0 < V_1 < \dots < V_n < S < U_n < \dots < U_1 < U_0$

نعيد هذه العملية بعدد غير منته من المرات، فنحصل على متتالية $(V_n)$ متزايدة و المتتالية $(U_n)$ متناقصة . و متتالية الفرق $V_n-U_n$ تقترب نحو الصفر.

المجالات $[V_0, U_0]$ ، $[V_1, U_1]$ ، ...... ، $[V_n, U_n]$ ، .... أطوالها تقترب من الصفر،

مما يجعل المجال $[V_n, U_n]$ حصرا دقيقا لـ $S$ .

### تمرين تدريبي 1

نريد حساب قيمة مقربة للمساحة $A$ للحيز $D$ المحدد بالمنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $x \xrightarrow{f} \frac{1}{x}$ و المستقيمات التي معادلاتها هي $x=1$ و $x=2$ و $y=0$ .

$D$ هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول 1سم) بحيث $2 \ge x \ge 1$ و $f(x) \ge y \ge 0$ .

على محور الفواصل نعلم النقطتين $A$ و $B$ فاصلتيهما على التوالي 1 و 2

و ليكن $n$ عدد طبيعي معطى حيث $n \ge 2$ .

نقسم القطعة $[AB]$ إلى $n$ قطع متقايسة و على كل قطعة نرسم مستطيلين أحد رأسيهما العلويين ينتمي إلى $(C_f)$ .

و هكذا نحصل على $n$ مستطيل سفلي يقع تحت $C_f$ و $n$ مستطيل علوي كما هو موضح في الشكل، نرمز بـ $s_n$ إلى المساحة الكلية للمستطيلات السفلية و $S_n$ إلى المساحة الكلية للمستطيلات العلوية نحصل هكذا على متتاليتين عدديتين $s_n$ و $S_n$ اللتان تحصران المساحة $A$ . أي $s_n < A < S_n$





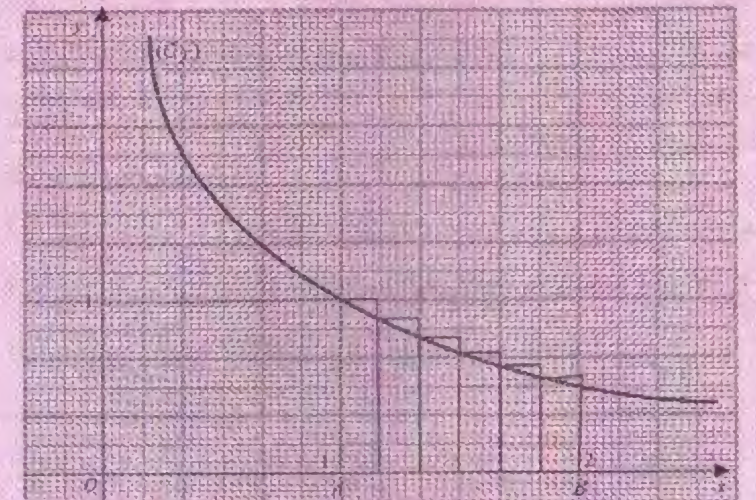
1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$ يكون

$$s_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

2) بين أن $(s_n)$ متزايدة و $(S_n)$ متناقصة.

3) بين أن $\lim (S_n - s_n) = 0$ ماذا تستنتج ؟

4) عين أصغر عدد طبيعي $p$ حيث $s_p$ قيمة مقربة لـ $A$ إلى $10^{-2}$ و عدد $q$ بحيث $S_q$ قيمة مقربة لـ $A$ إلى $10^{-2}$.




✓ الحل

1) - مساحة للمستطيل السفلي الأول هي : $\frac{1}{n} f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ .

مساحة المستطيل السفلي الثاني هي : $\frac{1}{n} \times f\left(1+\frac{2}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{n+2}{n}} = \frac{1}{n+2}$

و هكذا حتى نصل إلى المستطيل السفلي الأخير الذي مساحته $\frac{1}{n} \times f(2)$ و تساوي $\frac{1}{2n}$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات السفلية هي $s_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+ \dots + \frac{1}{2n}$

- مساحة المستطيل العلوي الأول هي :

$\frac{1}{n} \times f(1)$ و تساوي $\frac{1}{n}$

مساحة المستطيل العلوي الثاني هي :

$\frac{1}{n} \times f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{n+1}{n}}$

مساحة المستطيل العلوي الأخير هي :

$\frac{1}{n} \times f\left(2-\frac{1}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{2n-1}{n}}$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات العلوية هي :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ..... + \frac{1}{2n-1}$$

2) - إثبات أن $(s_n)$ متناقصة.

$$s_{n+1} - s_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ .... \ + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ .... \ + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ .... \ + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ .... \ + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{2n+1+2n-2(2n+1)}{2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

- إثبات أن $(S_n)$ متزايدة.

$$S_{n+1} - S_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ .... \ + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ .... \ + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

$S_n > 0$ ومنه فإن $(S_n)$ متزايدة.

3) بما أن $S_n - s_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n - s_n) = 0$

بما ان $(s_n)$ متزايدة و $(S_n)$ متناقصة و $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n - s_n) = 0$ فإن $(S_n)$ و $(s_n)$ متتاليتان متجاورتان و بالتالي لهما نفس النهاية $\ell$ و حسب نظرية الحصر فإن $A = \ell$.

4) تعيين $p$ بحيث $s_p$ قيمة مقربة لـ $A$ إلى $10^{-2}$.

$s_p$ قيمة مقربة لـ $A$ إلى $10^{-2}$ هذا معناه ان ..... (1) $|s_p - A| < 10^{-2}$

و بما ان $(s_n)$ متزايدة تماما فإن $|s_{p+1} - A| < 10^{-2}$

و لدينا $|s_{p+1} - s_p| = |(s_{p+1} - A) - (s_p - A)|$

لكن $|(s_{p+1} - A) - (s_p - A)| \leq |s_{p+1} - A| + |s_p - A|$





اي $|s_{p+1} - s_p| \leq |(s_{p+1} - A)| + |s_p - A| < 10^{-2} + 10^{-2}$

ومنه نجد $|s_{p+1} - s_p| < 2 \times 10^{-2}$

$|s_{p+1} - s_p| < 2 \times 10^{-2}$ يكافئ $\frac{1}{2(p+1)(2p+1)} < \frac{2}{10}$ يكافئ $p \in ]2.79. +\infty[$

و بما ان $p$ عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2 فإن اصغر قيمة ممكنة لـ $p$ هي 3 .

و في هذه الحالة تكون القيمة المقربة بالنقصان لـ $A$ إلى $10^{-2}$ هي $s_3 \approx 0.61$

- تعيين $q$ بحيث $S_q$ قيمة مقربة لـ $A$ إلى $10^{-2}$

بنفس الطريقة نجد $|S_{q+1} - S_q| < 2 \times 10^{-2}$

و منه نجد $\frac{1}{2q(2q+1)} < \frac{2}{10}$ و بالتبسيط نجد $2q^2 + q - 25 > 0$

و عليه $p \in ]3,29 ; +\infty[$

إذن اصغر قيمة لـ $q$ هي $q = 4$

إذن $S_4$ هي قيمة مقربة بالزيادة لـ $A$ إلى $10^{-2}$

$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \approx 0.75$ إذن $0,75 > A > 0,61$

العدد $A$ هو عدد شهير، و هو اللوغاريتم النيبري لـ 2 .

# تطبيقات نموذجية

## تطبيق ❶ نهاية المتتاليات

1) المتتالية $(U_n)$ معرفة من اجل كل $n \geq 2$ بـ $U_n = \frac{2n+1}{n-1}$ نهايتها 2.
أوجد العدد الطبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن $U_n$ تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$.

2) المتتالية $(V_n)$ معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $V_n = n^2\sqrt{n}$
نهايتها $(+\infty)$. أوجد العدد الطبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن $V_n$ تنتمي إلى المجال $]10^5 , +\infty[$

✓ الحل

1) الحدود $U_n$ تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$ يعني أن $1,98 < \frac{2n+1}{n-1} < 2,02$

و بطرح (2) من حدود هذه الأخيرة نجد $-0,02 < \frac{3}{n-1} < 0,02$

وبالضرب في $10^2(n-1)$ نجد $-2(n-1) < 3 < 2(n-1)$ ..... $(I)$

المتباينة $-2(n-1) < 3$ دوما محققة ومنه المتباينة $(I)$ تكافئ $3 < 2(n-1)$

$3 < 2(n-1)$ تكافئ $5 < 2n$ تكافئ $n > \frac{5}{2}$ ومنه قيمة $n_0$ المطلوبة هي 3 .

2) الحدود $V_n$ تنتمي إلى $]10^5 , +\infty[$ هذا يعني $n^2\sqrt{n} > 10^5$ أي $n^{\frac{5}{2}} > 10^5$

$n^{\frac{5}{2}} > 10^5$ يكافئ $(\sqrt{n})^5 > 10^5$ يكافئ $\sqrt{n} > 10$ يكافئ $n > 100$

ومنه قيمة $n$ المطلوبة هي 101 .

## تطبيق ❷ حصر متتالية - نهاية متتالية باستعمال نظرية الحصر

$(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $U_n = (\frac{n}{10} - 1)^n$

1) احسب $U_1$ , $U_2$ , $U_3$ , $U_4$

2) بين أنه إذا كان $n > 25$ فإن $U_n > (\frac{3}{2})^n$ ثم استنتج نهاية $(U_n)$.





✓ الحل

1) $u_1 = (\frac{1}{10} - 1)^1 = \frac{-9}{10}$ , $u_2 = (\frac{2}{10} - 1)^2 = \frac{64}{100}$

$u_3 = (\frac{3}{10} - 1)^3 = \frac{-343}{100}$ , $u_4 = \frac{81}{625}$

2) إذا كان $n > 25$ فإن $\frac{n}{10} - 1 > \frac{3}{2}$ و منه $(\frac{n}{10} - 1)^n > (\frac{3}{2})^n$

$\lim_{n \to +\infty} (\frac{3}{2})^n = +\infty$ لأن $(\frac{3}{2})^n$ حد عام لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2} > 1$

وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ .

## تطبيق ❸ نهاية متتالية

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية $(U_n)$ محددا القاعدة المستعملة

أ) $U_n = \frac{5n+2}{3n-2}$ ، ب) $U_n = 3n - \frac{1}{3n+2}$ ، جـ) $U_n = \frac{3n^2+5n+1}{n^2+n+1}$

د) $U_n = \sqrt{\frac{3n-1}{n+1}}$ ، هـ) $U_n = \cos(\frac{n\pi+1}{2n+1})$

و) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$ ، ي) $U_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n+1}$

✓ الحل

أ) $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{5n}{3n} = \frac{5}{3}$ (نهاية دالة ناطقة).

ب) $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{3n+2} = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} 3n = +\infty$ (قاعدة مجموع متتاليتين)

جـ) $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3$ (نهاية دالة ناطقة).

د) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{3n-1}{n+1}$ و $f(x) = \sqrt{x}$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} V_n = 3$ و $f$ مستمرة عند 3

فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = f(3) = \sqrt{3}$ (نهاية متتالية $(U_n)$ من الشكل $U_n = f(V_n)$)

هـ) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{n\pi+1}{2n+1}$ و $f(x)=\cos x$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{2}$ و الدالة $f$ مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

و) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n+2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \frac{1}{(\sqrt{n^2+3n+2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\,(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = 0$$

ي) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{0}{1} = 0$$



## تطبيق 4 حساب نهاية متتالية بالاعتماد على متتالية حسابية

$(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $U_0 = 2$

و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ و $V_n = \frac{3}{U_n}$

1) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n > 0$

2) أ) بين ان المتتالية $(V_n)$ حسابية ، ب) احسب $V_n$ ثم $U_n$ بدلالة $n$

3) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$ .

### ✓ الحل

1) نسمي $p_n$ الخاصية " $U_n > 0$ "

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0 = 2$ و $2 > 0$
- نفرض ان $p_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n$ اي $U_n > 0$

و نبرهن ان $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1} > 0$ .

بما اننا فرضنا $U_n > 0$ فإن $1+U_n > 0$ ومنه $\frac{U_n}{1+U_n} > 0$





إذن $U_{n+1} > 0$ بالتالي $p_{n+1}$ صحيحة و عليه $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$ .

2) أ) $(V_n)$ حسابية أساسها $q$ يعني $V_{n+1} = V_n + q$

$$V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1}} = \frac{3}{\frac{U_n}{1+U_n}} = 3\frac{(1+U_n)}{U_n} = \frac{3}{U_n}+3 = V_n+3$$

إذن $(V_n)$ حسابية أساسها $q=3$ وحدها الأول $V_0 = \frac{3}{U_0} = \frac{3}{2}$

ب) بما أن $(V_n)$ حسابية حدها الأول $V_0$ أساسها $q$

فإن عبارة الحد العام هي $V_n = V_0 + qn$ إذن $V_n = \frac{3}{2} + 3n$

- لدينا $V_n = \frac{3}{U_n}$ و منه $U_n = \frac{3}{V_n}$ بالتعويض نجد $U_n = \frac{3}{\frac{3}{2}+3n}$
- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\frac{3}{2}+3n} = 0$

## تطبيق 5 المتتاليات المحدودة

1) $(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم

بـ $U_n = 2 - \frac{3}{n^2}$ بين أن المتتالية $(U_n)$ محدودة.

2) $(V_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $V_n = \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}$

بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $1 \le V_n \le 3$ .

### ✓ الحل

1) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ لدينا $n^2 \ge 1$

بالقلب نجد $0 < \frac{1}{n^2} \le 1$ بالضرب في $-3$ نجد $-3 \le \frac{-3}{n^2} < 0$

و بإضافة 2 نجد $-1 \le 2 - \frac{3}{n^2} < 2$ اي $-1 < U_n < 2$

إذن المتتالية $(U_n)$ محدودة لأنها محدودة من الأعلى و من الأسفل.

2) $$V_n = \frac{(n^2+n+1)+(2n+2)}{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1} + \frac{2(n+1)}{n^2+n+1} = 1+2\times\frac{n+1}{n^2+n+1}$$

بما ان $2(\frac{n+1}{n^2+n+1})>0$ فإن $1+2(\frac{n+1}{n^2+n+1})\ge 1$ اي $V_n\ge 1$

و بما ان $n^2+n+1\ge n+1$ فإن $\frac{n+1}{n^2+n+1}\le 1$

وبضرب طرفي هذه المتباينة في 2 نجد $2(\frac{n+1}{n^2+n+1})\le 2$ بإضافة 1 نجد $V_n\le 3$

إذن $3\ge V_n\ge 1$

## تطبيق 6 حصر متتالية بمتتاليتين

من اجل كل متتالية $(U_n)$ من المتتالية الآتية اوجد متتاليتين $(V_n)$ و $(W_n)$ مختلفتين عن $(U_n)$ بحيث $V_n\le U_n\le W_n$.

أ) $U_n=\frac{n+3}{n+2}$ ،

ب) $U_n=\frac{5n^2-4n+7}{n-1}$ مع $n\ge 2$

جـ) $U_n=\sqrt{3+n}$

د) $U_n=\frac{1}{\sqrt{3+n}}$



### ✓ الحل

أ) من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $n+4\ge n+3\ge n+2$ ..... (1)

$n+3\ge n+2\ge n+1$ بالقلب نجد $\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{n+2}\ge\frac{1}{n+3}$ ....... (2)

بضرب حدود (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{n+4}{n+1}\ge U_n\ge\frac{n+2}{n+3}$

ومنه $W_n=\frac{n+4}{n+1}$ و $V_n=\frac{n+2}{n+3}$.

ب) من اجل عدد طبيعي $n\ge 2$ يكون $U_n=n-3+\frac{4}{n-1}$

من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ يكون $n-1\ge 1$ ومنه $0<\frac{1}{n-1}\le 1$

بالضرب في 4 نجد $0<\frac{4}{n-1}\le 4$

وبإضافة $n-3$ نجد $n-3+0\le n-3+\frac{4}{n-1}\le n-3+4$

اي $n-3\le U_n\le n+1$ إذن $W_n=n+1$ و $V_n=n-3$.





جـ) من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $n+4\ge n+3\ge n+2$ بالجذر نجد ،

$\sqrt{n+4}\ge\sqrt{n+3}\ge\sqrt{n+2}$ اي $W_n\ge U_n\ge V_n$.

حيث $V_n=\sqrt{n+2}$ و $W_n=\sqrt{n+4}$

د) $\sqrt{n+4}\ge\sqrt{n+3}\ge\sqrt{n+2}$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+4}}\le\frac{1}{\sqrt{n+3}}\le\frac{1}{\sqrt{n+2}}$

اي $V_n\le U_n\le W_n$ حيث $W_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ و $V_n=\frac{1}{\sqrt{n+4}}$.

## تطبيق 7 حساب نهاية متتالية باستعمال الحصر

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

1) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $0<U_n\le\sqrt{2}$

2) أ) بين انه إذا كانت $n>10^4$ فإن $0<U_n<10^{-2}$

ب) بين انه إذا كانت $n>10^8$ فإن $0<U_n<10^{-4}$

جـ) كيف نختار $n$ بحيث $U_n<10^{-8}$ ؟ ما هي نهاية $(U_n)$ ؟

### ✓ الحل

1) من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $n+2>n$ بجذر الطرفين نجد $\sqrt{n+2}>\sqrt{n}$ بالتالي ، $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}>0$ اي $U_n>0$.

$U_n$ تكتب على الشكل $U_n=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $\sqrt{n+2}\ge\sqrt{2}$ و $\sqrt{n}\ge 0$ و منه

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\ge\sqrt{2}$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ بالضرب في 2 نجد

$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\le\sqrt{2}$ اي $U_n\le\sqrt{2}$ إذن $0<U_n\le\sqrt{2}$

2) أ) إذا كان $n>10^4$ فإن $\sqrt{n+2}>\sqrt{10^4+2}>\sqrt{10^4}\ge 10^2$ و $\sqrt{n}>10^2$

وبالتالي يكون $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>2\times 10^2$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\times 10^2}$

وبالضرب في 2 نجد $U_n<10^{-2}$

ب) إذا كان $n>10^8$ فإن $\sqrt{n+2}>10^4$ و $\sqrt{n}>10^4$ و بالتالي يكون :

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>2\times 10^4$ و بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\times 10^4}$ إذن $U_n<10^{-4}$

جـ) من السؤال (أ) و (ب) نستنتج انه يمكن اختيار $n$ بحيث $n \rangle 10^{16}$ يحقق $U_n \langle 10^{-8}$ .

- نلاحظ انه كلما كبر $n$ فإن المجال الذي تنتمي إليه الحدود $U_n$ يصغر و يقترب نحو الصفر ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ .

## تطبيق 8 دراسة تقارب متتاليات - البرهان بالتراجع

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\sqrt{1+U_n^2}$ .

1) أ) بين بالتراجع انه من اجل كل $n\in IN$ يكون $U_n=\sqrt{1+n}$

ب) ادرس تقارب المتتالية $(U_n)$ .

2) نضع $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و $W_n=\frac{U_n+U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ادرس تقارب هاتين المتتاليتين .

### الحل

1) أ) نسمي $p_n$ الخاصية "$U_n=\sqrt{n+1}$"

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0=1=\sqrt{1+0}$
- نفرض ان $p_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n$ اي $U_n=\sqrt{1+n}$

ونبرهن ان $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1}=\sqrt{2+n}$ .

$$U_{n+1}=\sqrt{1+U_n^2}=\sqrt{1+(\sqrt{1+n})^2}=\sqrt{2+n}$$

منه $p_{n+1}$ صحيحة إذن $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$ .

ب) $\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+n}=+\infty$ منه $(U_n)$ متتالية متباعدة.

2) $\lim_{n\to+\infty} V_n=\frac{+\infty}{+\infty}$ حالة عدم التعيين.

من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}=\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$

بما ان $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n=\sqrt{1}=1$ إذن المتتالية $(V_n)$ متقاربة.

- $W_n=\frac{U_n+U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ، $\lim_{n\to+\infty} W_n=\frac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين.

تكتب $W_n$ $W_n=\frac{\sqrt{1+n}+\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}$

$\lim_{n\to+\infty} W_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{n+3}}+\frac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}\right)=1+1=2$ إذن المتتالية $(W_n)$ متقاربة.





## تطبيق 9 دراسة تقارب متتالية و حساب نهايتها

$(U_n)$ متتالية حدودها موجبة معرفة بـ $U_1=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$ يكون $n^2U_n^2-(n-1)^2U_{n-1}^2=n$ ..... $(I)$

1) لتكن $(V_n)$ متتالية معرفة من اجل كل $n\ge 1$ بـ $V_n=n^2U_n^2$

أ) تحقق انه من اجل كل $n\ge 1$ يكون $V_{n+1}-V_n=n+1$ .

ب) استنتج عبارة $V_n$ بدلالة $n$ .

2) استنتج ان المتتالية $(U_n)$ متقاربة يطلب إيجاد نهايتها.

### الحل

1) أ) من المساواة $(I)$ نجد $V_n-V_{n-1}=n$

باستبدال $n$ بـ $n+1$ نحصل على $V_{n+1}-V_n=n+1$ .

ب) من العلاقة $V_{n+1}-V_n=n+1$ نجد :

$$\begin{aligned} V_2-V_1&=2\\ V_3-V_2&=3\\ V_4-V_3&=4\\ &\vdots\\ V_{n-1}-V_{n-2}&=n-1\\ V_n-V_{n-1}&=n \end{aligned}$$



بجمع أطراف المساويات طرفا إلى طرف نجد $V_n-V_1=2+3+\dots+n$

ومنه $V_n=V_1+2+3+\dots+n$ وبما ان $V_1=1$ فإن $V_n=1+2+3+\dots+n$ .

$V_n$ مجموع $n$ حد الأولى من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 1

ومنه $V_n=\frac{n(n+1)}{2}$

2) $U_n^2=\frac{V_n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}$ ومنه $U_n=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}}$

بما ان $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n=\sqrt{\frac{1}{2}}$ وبالتالي المتتالية $(U_n)$ متقاربة.

## تطبيق 10 اتجاه تغير متتالية - تقارب متتالية

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $\begin{cases} U_0=5\\ U_{n+1}=3+\frac{U_n}{4}\end{cases}$

أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n > \frac{9}{2}$

ب) استنتج اتجاه تغير $(U_n)$

جـ) استنتج أن $(U_n)$ متقاربة ثم عين نهايتها.

### ✓ الحل

أ) نسمي $p_n$ الخاصية "$U_n > \frac{9}{2}$"

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0 = 5$ و $5 > \frac{9}{2}$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي $n$ كيفي اي $U_n > \frac{9}{2}$

ونبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

لدينا فرضا $U_n > \frac{9}{2}$ بالضرب في $\frac{1}{3}$ نجد $\frac{U_n}{3} > \frac{3}{2}$

وبإضافة 3 نجد $3+\frac{U_n}{3} > \frac{9}{2}$ اي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

إذن $p_{n+1}$ صحيحة وبالتالي $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$

ب) من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_{n+1}-U_n = -\frac{2}{3}(U_n-\frac{9}{2})$

بما ان $U_n-\frac{9}{2} > 0$ فإن $-\frac{2}{3}(U_n-\frac{9}{2}) < 0$ اي $U_{n+1}-U_n < 0$ مما يدل ان $(U_n)$ متناقصة.

جـ) بما ان $(U_n)$ متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي $\ell$ الذي هو جذر للمعادلة $x=f(x)$ حيث $f(x)=3+\frac{x}{3}$

$x=3+\frac{x}{3}$ يكافئ $\frac{2}{3}x=3$ يكافئ $x=\frac{9}{2}$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell=\frac{9}{2}$ مقبول وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n=\frac{9}{2}$

## تطبيق 11 المتتالية المحدودة

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 1$

2) $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=-1+\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$

هل المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى ؟ من الأسفل ؟ محدودة ؟





### ✓ الحل

1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $n+1 \ge 1$ و منه $\sqrt{n+1} \ge 1$

بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 1$.

2) $U_n+1=\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$ منه $|U_n+1|=\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}\right|$

بما ان $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 1$ و $0 \le |\sin n| \le 1$ فإن $0 < \frac{|\sin n|}{\sqrt{n+1}} \le 1$ اي $|U_n+1| \le 1$

هذا معناه ان $-1 \le U_n+1 \le 1$ اي $-2 \le U_n \le 0$ إذن المتتالية $(U_n)$ محدودة.

## تطبيق 12 دراسة تقارب متتالية

من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم نضع $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

1) بين أن المتتالية $(U_n)$ متزايدة.

2) أ) احسب $U_{2n}-U_n$ ، ب) استنتج ان $U_{2n}-U_n \ge \frac{1}{2}$

3) بفرض انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم $U_{2n} \ge \frac{n}{2}$

هل المتتالية $(U_n)$ متقاربة ؟

### ✓ الحل

1) $U_{n+1}-U_n = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1})-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$

بما أن من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $\frac{1}{n+1} > 0$ فإن $U_{n+1}-U_n > 0$ ومنه $(U_n)$ متزايدة

2) أ) $U_{2n}-U_n = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})$

$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

ب) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $n+1 \le n+2 \le n+3 \le n+4 \le \dots \le 2n$

بالقلب نجد $\frac{1}{n+1} \ge \frac{1}{n+2} \ge \frac{1}{n+3} \ge \dots \ge \frac{1}{2n}$

إذن $U_{2n}-U_n \ge \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+ \dots +\frac{1}{2n}}_{n \text{ حدا}}$ اي $U_{2n}-U_n \ge n\times\frac{1}{2n}$

ومنه $U_{2n}-U_n\ge \frac{1}{2}$

3) بما ان $\lim \frac{n}{2}=+\infty$ فإن المتتالية $(U_n)$ متباعدة ( حسب نظرية الحصر).

## تطبيق 13 البرهان بالتراجع - دراسة تقارب متتالية

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$

2) استنتج ان المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ : $U_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+ \dots +\frac{1}{n!}$ محدودة من الأعلى ومتقاربة .

### الحل

1) نسمي $p_n$ الخاصية " $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ "

- $p_1$ صحيحة لأن $\frac{1}{1!}=1$ و $\frac{1}{2^{1-1}}=1$ و $1\le 1$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $n$ غير معدوم اي $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$

ونبرهن ان $p_{n+1}$ صحيحة اي $\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$.

بضرب طرفي المتباينة $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ في $\frac{1}{n+1}$ نجد $\frac{1}{(n+1)(n!)}\le\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$

اي $\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{(n+1)\,2^{n-1}}$ ............(1)

وبما انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{2}$

فإن $\frac{1}{(n+1)\,2^{n-1}}\le\frac{1}{2^n}$ ............(2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$

إذن $p_{n+1}$ صحيحة بالتالي $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

2) $\frac{1}{1!}\le\frac{1}{2^0}$





$\frac{1}{2!}\le\frac{1}{2^1}$

$\vdots$

$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ بجمع أطراف المتباينات طرف لطرف نجد :

$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+ \dots \frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+ \dots +\frac{1}{2^{n-1}}$ أي $U_n\le(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+ \dots +(\frac{1}{2})^{n-1}$

$(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+\dots+(\frac{1}{2})^{n-1}$ مجموع $n$ حد من حدود متتالية هندسية حدها 1 واساسها $\frac{1}{2}$

ومنه $(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+ \dots +(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2(\frac{1}{2})^n$

إذن $U_n\le 2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]$

لدينا $(\frac{1}{2})^n\ge 0$ ومنه $1-(\frac{1}{2})^n\le 1$

بالضرب في 2 نجد $2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]\le 2$ إذن $U_n\le 2$

إذن المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى.

- من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(n+1)!}> 0$

ومنه المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما و بما انها محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

## تطبيق 14 المتتالية الدورية

$(U_n)$ متتالية دورية إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي غير معدوم $p$ بحيث من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_{n+p}=U_n$

لتكن المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ $\begin{cases}U_0=2\\U_n+U_{n+1}=5\end{cases}$

بين ان $(U_n)$ دورية. هل $(U_n)$ رتيبة ؟

### الحل

$U_{n+p}=5-U_{n+p-1}=5-(5-U_{n+p-2})=U_{n+p-2}$

بما ان $U_{n+p}=U_n$ و $U_{n+p-2}=U_n$

فانه ينتج من أجل كل $n$ لدينا $n+p-2=n$ اي $p=2$

و بالتالي $(U_n)$ دورية دورها 2 .

- $U_{n+1}-U_n = 5-2U_n$

إذا كان $n$ زوجي فإن $5-2U_n > 0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n > 0$

و إذا كان $n$ فردي فإن $5-2U_n < 0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n < 0$

إذن إشارة $U_{n+1}-U_n$ ليست ثابتة و بالتالي $(U_n)$ ليست رتيبة.

## تطبيق 15 تعيين نهاية متتالية بطريقتين مختلفتين

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}$

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي موجب تماما $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)$ ثم استنتج تقاربها.

2) أ) بين أنه من أجل كل $x\in[0,\pi]$ يكون $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$

ب) بين عندئذ أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

و استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$.

### ✔ الحل

1) أ) نسمي $p_n$ الخاصية " $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ "

- $p_1$ صحيحة لأن $U_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 1$

- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n$ غير معدوم أي $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$

ونبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_{n+1}\le 1$.

لدينا $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ بإضافة 1 إلى حدود هذه المتباينة نجد $\frac{\sqrt{2}}{2}+1\le U_n+1\le 2$

بالجذر نجد $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\le\sqrt{U_n+1}\le\sqrt{2}$ بالضرب في $\frac{\sqrt{2}}{2}$ نجد،

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\le U_{n+1}\le 1$ لأن $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}>1$ ،

إذن $p_{n+1}$ صحيحة و بالتالي $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم.





ب) $U_{n+1}-U_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}-U_n=\frac{\frac{1}{2}(1+U_n)-U_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}+U_n}=\frac{(U_n-1)(-2U_n-1)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}+U_n\right)}$

بما أن $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ فإن $-2U_n-1\le 0$ و $U_n-1\le 0$ ومنه

$(U_n-1)(-2U_n-1)>0$ بالتالي $U_{n+1}-U_n>0$ أي $(U_n)$ متزايدة

- بما أن $(U_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو عدد حقيقي $\ell$ الذي هو جذر للمعادلة $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+x}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+x}$ يكافئ $2x^2-x-1=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-\frac{1}{2})$

$x=-\frac{1}{2}$ مرفوض و منه $\lim_{n\to+\infty}U_n=1$

2) أ) لدينا من أجل كل $x$ من $[0,\pi]$ لدينا ،

$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ و $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$

منه ينتج $\frac{1+\cos x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}$ إذن $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

بما أن $\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos\frac{x}{2}>0$ ومنه $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$ .

ب) نسمي $p_n$ الخاصية " $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ "

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0=0=\cos\frac{\pi}{2^1}$

- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n$ أي $U_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

ونبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $U_{n+1}=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$$U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

منه $p_{n+1}$ صحيحة إذن $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=1$$

## تطبيق 16 المقارنة و النهاية

$(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$ بـ:

$$U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) بين انه من اجل كل $n \ge 1$ يكون $\frac{n^2}{n^2+n} \le U_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$

2) استنتج تقارب المتتالية $(U_n)$ ثم احسب نهايتها.

✓ الحل

1) $(U_n)$ مجموع $n$ حدا أصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ و اكبرها $\frac{n}{n^2+1}$

وعليه يكون $\frac{n}{n^2+n} + \dots\dots + \frac{n}{n^2+n} \le U_n \le \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}$

ومنه نجد $n\left(\frac{n}{n^2+n}\right) \le U_n \le n\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ اي $\frac{n^2}{n^2+n} \le U_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$

لأن $n^2+1 < n^2+2 < \dots < n^2+n$

2) بما أن $W_n \le U_n \le V_n$ حيث $V_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ و $W_n = \frac{n^2}{n^2+n}$ و $(V_n)$ و $(W_n)$ متقاربتان

و لهما نفس النهاية فإن المتتالية $(U_n)$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} W_n = 1$

## تطبيق 17 النهايات و الحصر

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{9}{U_n}\right) \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أن للمتتالية $(U_n)$ محدودة من الأسفل بـ 3

2) ادرس اتجاه تغير $(U_n)$

3) بين بالتراجع ان $U_n \le \frac{1}{2^n} + 3$ ثم استنتج نهاية $(U_n)$

✓ الحل

1) $(U_n)$ محدودة من الأسفل بـ 3 هذا معناه انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $U_n \ge 3$

نسمي $p_n$ الخاصية "$U_n \ge 3$"





- $p_0$ صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $4 \ge 3$
- نفرض ان $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n$ أي $U_n \ge 3$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $U_{n+1} \ge 3$

الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{x}\right)$ متزايدة تماما على $[3,+\infty[$

لأن $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-9}{x^2}\right)$ و $f'(x) > 0$ من أجل كل $x \ge 3$.

بما أن $f$ متزايدة تماما على $[3,+\infty[$ و $U_n \ge 3$

فإن $f(U_n) \ge f(3)$ أي $U_{n+1} \ge f(3)$

لكن $f(3) = 3$ إذن $U_{n+1} \ge 3$ وهذا يعني أن $p_{n+1}$ صحيحة.

إذن $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{9}{U_n}\right) - U_n = -\frac{1}{2}\left(U_n - \frac{9}{U_n}\right)$

$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{U_n^2 - 9}{U_n}\right) = -\frac{1}{2}\frac{(U_n-3)(U_n+3)}{U_n}$

بما أن $U_n \ge 3$ فإن $(U_n - 3) \ge 0$ و $U_n + 3 > 0$

ومنه $-\frac{1}{2}\frac{(U_n-3)(U_n+3)}{U_n} \le 0$

أي $U_{n+1} - U_n \le 0$ و هذا يعني $(U_n)$ متناقصة.

3) نسمي $p_n$ الخاصية "$U_n \le 3 + \frac{1}{2^n}$"

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $3 + \frac{1}{2^0} = 4$ و $4 \le 4$
- نفرض أن $p_n$ صحيحة اي $U_n \le 3 + \frac{1}{2^n}$

و نبرهن ان $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1} \le 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$.

لدينا $U_n \ge 3$ منه ينتج $\frac{9}{2U_n} \le \frac{3}{2}$ ..... (1)

من الفرض $U_n \le 3 + \frac{1}{2^n}$ ينتج $\frac{1}{2}U_n \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$ .... (2)

بجمع طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{1}{2}U_n + \frac{9}{2U_n} \le \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$

اي $U_{n+1} \le 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$ ومنه $p_{n+1}$ صحيحة.

إذن $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$

- بما ان $(U_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

وبما ان $3 \le U_n \le 3+\frac{1}{2^n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)=3$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

## تطبيق 18 المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=aU_n+b$

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $U_0=1$ و $2U_{n+1}=U_n-1$

1) احسب الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

2) $\alpha$ عدد حقيقي و $(V_n)$ متتالية معرفة من اجل كل $n$ ب $V_n=U_n-\alpha$

أ) عين قيمة $\alpha$ حتى تكون $(V_n)$ هندسية

ب) اكتب $V_n$ و $U_n$ بدلالة $n$ ثم ادرس تقارب المتتالية $(U_n)$

جـ) أوجد أصغر عدد طبيعي $n$ بحيث $U_n \in \left]-1-10^{-4} , -1+10^{-4}\right[$

### الحل

1) من المعطيات نجد $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{2}$

$U_1=0$ ، $U_2=-\frac{1}{2}$ ، $U_3=\frac{-3}{4}$ ، $U_4=\frac{-7}{8}$ ، $U_5=-\frac{15}{16}$

2) أ) $V_{n+1}=U_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}(V_n+\alpha)-\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}V_n-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}$

حتى تكون $(V_n)$ هندسية يجب ان يكون $-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}=0$ اي $\alpha=-1$

ب) $V_n=V_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $V_0=U_0+1=2$ إذن $V_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $U_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}U_n=-1$ ومنه $(U_n)$ متقاربة نحو -1.

جـ) $U_n\in\left]-1-10^{-4} , -1+10^{-4}\right[$ هذا معناه ان $-1-10^{-4}<U_n<-1+10^{-4}$

اي $-1-10^{-4}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1<-1+10^{-4}$ و بإضافة 1 نجد $-10^{-4}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<10^{-4}$

المتباينة $-10^{-4}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ دوما محققة يبقى لنا فقط إيجاد $n$ بحيث $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<10^{-4}$

بما ان $2^{-4}>10^{-4}$ فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$

ومنه $n-1>4$ اي $n>5$ ومنه اصغر قيمة للعدد $n$ هي 6 .





## تطبيق 19 المتتاليات و الادخار

نضع في بنك مبلغ قدره 25000 DA في أول جانفي 2008 بفائدة قدرها 5% لكل سنة و نسحب في نهاية كل سنة 2500 DA.

إذا كانت $U_n$ القيمة بالدينار للمبلغ المتبقي في البنك في السنة $n$ ( أي السنة $2008+n$ )

1) أوجد علاقة تربط بين $U_{n+1}$ و $U_n$

2) بين ان المتتالية $(V_n)$ المعرفة ب $V_n=U_n-50000$ هندسية يطلب تعيين اساسها

3) ما هي السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك ؟

### الحل

1) إذا كان $U_n$ هو المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n)$ و $U_{n+1}$ المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n+1)$ فإن $U_{n+1}=U_n+5\%\times U_n-2500$

ومنه نجد $U_{n+1}=1.05U_n-2500$

2) $V_{n+1}=U_{n+1}-50000=1,05U_n-2500-50000$
$=1,05\left(V_n+50000\right)-52500$
$=1,05V_n+1,05\times50000-52500=1,05V_n$

إذن $(V_n)$ هندسية اساسها $q=1,05$

مع $V_n=V_0q^n$ ، $V_0=U_0-50000=-25000$

ومنه $V_n=-25000(1,05)^n$

بما ان $U_n=V_n+50000$ فإن $U_n=-25000(1,05)^n+50000$

3) ينفذ رصيده من البنك هذا معناه $U_n=0$ اي $(1,05)^n=2$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $n\approx14,25$

ومنه السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك هي $2008+15$ اي 2023 .

## تطبيق 20 المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=\frac{aU_n+b}{cU_n+d}$

لتكن $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{2U_n+1}{U_n+2}$ .

1) بين بالتراجع ان $0\le U_n<1$

2) بين ان المتتالية $(U_n)$ رتيبة .

3) $(V_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

بين ان $(V_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول.

4) اكتب $V_n$ و $U_n$ بدلالة $n$ معينا نهاية $(U_n)$

5) اوجد العدد الطبيعي $n_0$ بحيث من اجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n > 0,99$ .

✓ الحل

1) يمكن كتابة $U_{n+1} = 2 - \frac{3}{U_n + 2}$

نسمي $p_n$ الخاصية "$1 > U_n \geq 0$"

- $p_0$ صحيحة لأن $U_0 = 0$ و $1 > 0 \geq 0$

- نفرض ان $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$ اي $1 > U_n \geq 0$

ونبرهن ان $p_{n+1}$ صحيحة اي $1 > U_{n+1} \geq 0$

لدينا $1 > U_n \geq 0$ منه ينتج $\frac{1}{3} < \frac{1}{U_n + 2} \leq \frac{1}{2}$

بالضرب في $(-3)$ نجد $-1 > \frac{-3}{U_n + 2} \geq -\frac{3}{2}$

وباضافة 2 نجد $1 > U_{n+1} \geq \frac{1}{2} \geq 0$ ومنه $p_{n+1}$ صحيحة.

إذن $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$ .



2) $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - U_n = \frac{-U_n^2 + 1}{U_n + 2} = -\frac{(U_n - 1)(U_n + 1)}{U_n + 2}$

بما ان $1 > U_n \geq 0$ فإن $-(U_n - 1) \geq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$ اي $(U_n)$ متزايدة.

3) $$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - 1}{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} + 1} = \frac{U_n - 1}{3U_n + 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{U_n - 1}{U_n + 1}\right) = \frac{1}{3}V_n$$

منه $(V_n)$ هندسية اساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1} = -1$

4) لدينا $V_n = V_0 q^n$ إذن $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ يكافئ $U_n = \frac{V_n + 1}{1 - V}$





إذن $U_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

5) $U_n > 0,99$ يكافئ $\frac{0,01}{1,99} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ يكافئ $\frac{1}{3^4} > \frac{1}{199} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

و منه نجد $4 < n$ و عليه اصغر قيمة لـ $n$ هي 5 .

---

## تطبيق 21 المتتاليات المتجاورة

$a$ و $b$ عددان حقيقيان بحيث $0 < a < b$ .

$(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$

و $U_0 = a$ و $V_0 = b$ و $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$ و $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

1) بين انه من اجل كل $n$ تكون $(U_n)$ و $(V_n)$ موجبتين تماما.

2) بين انه من اجل كل $n$ يكون $U_n \leq V_n$

3) أ) بين انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$$

ب) استنتج أن $0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

4) أ) بين أن المتتاليتين $(V_n)$ و $(U_n)$ متجاورتان.

ب) إذا كانت $a = 2$ و $b = 5$ استعمل نتائج السؤال (3) لإيجاد القيمة التقريبية للنهاية المشتركة لـ $(U_n)$ و $(V_n)$ بتقريب $10^{-3}$ .

✓ الحل

1) نبين انه من اجل كل $n$ لدينا $U_n > 0$ و $V_n > 0$

نسمي $p_n$ الخاصية " $U_n > 0$ و $V_n > 0$ "

- $p_0$ صحيحة لأن $V_0 = a$ و $V_0 = b$ و $a > 0$ و $b > 0$

- نفرض ان $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $n$ كيفي اي $U_n > 0$ و $V_n > 0$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1} > 0$ و $V_{n+1} > 0$ .

بما أن $U_n > 0$ و $V_n > 0$ فإن $\frac{U_n + V_n}{2} > 0$

اي $V_{n+1} > 0$

بما ان $U_n > 0$ و $V_n > 0$ فإن $U_nV_n > 0$

وبالتالي $\sqrt{U_nV_n} > 0$ اي $U_{n+1} > 0$

ومنه $p_{n+1}$ صحيحة

إذن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $n$.

2) الخاصية $p_n$ " $U_n < V_n$ "

– $p_0$ صحيحة لأن $U_0=a$ و $V_0=b$ و $a<b$

- نفرض أن $p_n$ صحيحة اي $U_n<V_n$

و نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1}<V_{n+1}$.

$$U_{n+1}-V_{n+1}=\sqrt{U_nV_n}-\frac{U_n+V_n}{2}$$

$$=\frac{U_nV_n-\left(\frac{U_n+V_n}{2}\right)^2}{\sqrt{U_nV_n}+\frac{U_n+V_n}{2}}=\frac{-(U_n-V_n)^2}{4\left(\sqrt{U_nV_n}+\frac{U_n+V_n}{2}\right)}$$

بما ان $-(U_n-V_n)^2<0$ فإن $U_{n+1}-V_{n+1}<0$

أي $U_{n+1}<V_{n+1}$ ومنه $p_{n+1}$ صحيحة.

إذن $p_n$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

3) أ) $V_{n+1}-U_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}-\sqrt{U_nV_n}$

(لأن $V_n < U_n$) $V_{n+1}-U_{n+1}<\frac{U_n+V_n}{2}-U_n$

إذن $V_{n+1}-U_{n+1}<(V_n-U_n)\times\frac{1}{2}$



ب) نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

- من أجل $n=0$ لدينا $V_0-U_0=b-a$ و $b-a\le(b-a)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0$

نفرض أن الخاصية $p_n$ صحيحة اي $V_n-U_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)$

ونبرهن أن الخاصية $p_{n+1}$ صحيحة اي $V_{n+1}-U_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)$

لدينا $(V_{n+1}-U_{n+1})\le\frac{1}{2}(V_n-U_n)\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)$

إذن $p_{n+1}$ صحيحة ومنه $p_n$ صحيحة من اجل كل $n$





4) أ) تعيين اتجاه تغير المتتالية $(V_n)$

$V_{n+1}-V_n=\frac{U_n+V_n}{2}-V_n=\frac{U_n-V_n}{2}<0$ ومنه نستنتج أن $(V_n)$ متناقصة.

- تعيين اتجاه تغير $(U_n)$.

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_nV_n}-U_n=\frac{U_nV_n-U_n^2}{\sqrt{U_nV_n}+U_n}=\frac{U_n(V_n-U_n)}{\sqrt{U_nV_n}+U_n}>0$$

لأن $V_n-U_n>0$ ومنه $(U_n)$ متزايدة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)=0$ (حسب قاعدة الحصر)

إذن $(U_n)$ و $(V_n)$ متجاورتان.

ب) (1) ..... $|U_n-V_n|\le3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $|U_n-\ell|<10^{-3}$ و $|V_n-\ell|<10^{-3}$

بما ان $|U_n-V_n|\le|U_n-\ell|+|V_n-\ell|$ فإن (2) ..... $|U_n-V_n|\le2\times10^{-3}$

حتى تكون (2) محققة يجب ان يكون $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n<2\times10^{-3}$

اي $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{2}{3}\times10^{-3}$ بالتبسيط نجد $\left(\frac{1}{2}\right)^n\le66\times10^{-5}$

ومنه قيمة $n$ التي تحقق المتباينة الأخيرة هي 11 إذن القيمة التقريبية لـ $\ell$ هي $U_{11}$

## تطبيق 22 المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=\frac{aU_n+b}{cU_n+d}$

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ $IN^*$ بـ $U_1=\frac{2}{7}$ و $U_{n+1}=\frac{U_n}{3-U_n}$

(نقبل انه من اجل كل $n\ge1$ يكون $U_n\neq0$ و $U_n\neq3$)

1) احسب $U_2$ و $U_3$.

2) أ) $(V_n)$ متتالية معرفة على $IN^*$ بـ $V_n=\frac{1}{U_n}$ احسب $V_1$

ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n\ge1$ يكون $V_{n+1}=3V_n-1$

3) $(W_n)$ متتالية معرفة بـ: $W_n=V_n-\frac{1}{2}$ عبر عن $W_{n+1}$ بدلالة $W_n$

ثم عين $W_n$ بدلالة $n$.

4) أ) استنتج عبارة $U_n$ بدلالة $n$

ب) هل المتتالية $(U_n)$ متقاربة ؟

✔ الحل

1) $U_2 = \frac{U_1}{3-U_1} = \frac{\frac{2}{7}}{3-\frac{2}{7}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{19}{7}} = \frac{2}{19}$ ، $U_3 = \frac{U_2}{3-U_2} = \frac{\frac{2}{19}}{\frac{55}{19}} = \frac{2}{55}$

2) أ) $V_1 = \frac{1}{U_1} = \frac{19}{2}$

ب) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{3-U_n}} = \frac{3-U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n}-1 = 3\left(\frac{1}{U_n}\right)-1 = 3V_n-1$

3) $W_n = V_n-\frac{1}{2}$

$$W_{n+1} = V_{n+1}-\frac{1}{2} = (3V_n-1)-\frac{1}{2} = 3V_n-\frac{3}{2} = 3\left(V_n-\frac{1}{2}\right) = 3W_n$$

$$W_1 = V_1-\frac{1}{2} = \frac{19}{2}-\frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$(W_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $W_1=9$ و أساسها $r=3$

ومنه $W_n = W_1 \times r^{n-1}$ بالتعويض نجد $W_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$

4) أ) $V_n = W_n+\frac{1}{2}$ و $U_n = \frac{1}{V_n}$

ومنه $U_n = \frac{1}{W_n+\frac{1}{2}}$ بالتعويض نجد $U_n = \frac{1}{3^{n+1}+\frac{1}{2}}$

ب) $\lim_{n\to+\infty}\left(3^{n+1}\right) = +\infty$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو الصفر.

## تطبيق 23 المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n+b}{cU_n+d}$ - النهاية و الحصر

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1} = \frac{3U_n+9}{2U_n}$

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n \geq 0$

ثم بين أن $U_{n+1}-3$ و $U_n-3$ مختلفين في الإشارة .

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

ب) استنتج انه إذا كانت $(U_n)$ متقاربة فإن نهايتها 3 .





3) استنتج انه من أجل كل $n$ يكون $|U_{n+1}-3| \leq \frac{3}{4}|U_n-3|$ ( نقبل أن $U_n \geq 2$ )

4) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $|U_n-3| \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ب) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$ .

✔ الحل

1) - من أجل $n=0$ لدينا $U_0=1$ والمتباينة $1>0$ صحيحة إذن $p_0$ صحيحة

- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n\geq 0$ أي $U_n>0$

ونبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $U_{n+1}>0$.

بما أن $U_n>0$ فإن $3U_n+9>0$ و $2U_n>0$

وبالتالي $\frac{3U_n+9}{2U_n}>0$ أي $U_{n+1}>0$ ومنه $p_{n+1}$ صحيحة

إذن من أجل كل $n\geq 0$ لدينا $U_n>0$

$$U_{n+1}-3 = \frac{3U_n+9}{2U_n}-3 = \frac{3U_n+9-6U_n}{2U_n} = \frac{3(3-U_n)}{2U_n}$$

بما أن $2U_n>0$ فإن $(U_{n+1}-3)(3-U_n)>0$

وبالتالي نستنتج أن $U_{n+1}-3$ و $U_n-3$ مختلفين في الإشارة .

2) نسمي $p_n$ الخاصية "$U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$"

- من أجل $n=0$ يكون $U_0=1$ و $U_1=6$ و $1\leq 3\leq 6$ ومنه $p_0$ صحيحة

- نفرض أن $p_n$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n\geq 0$ أي $U_{2n}\leq 3\leq U_{2n+1}$

ونبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة أي $U_{2n+2}\leq 3\leq U_{2n+3}$

• نبرهن أولا $U_{2n+2}\leq 3$

لدينا $U_{2n+2} = \frac{3U_{2n+1}+9}{2U_{2n+1}} = \frac{3}{2}+\frac{9}{2U_{2n+1}}$

بما أن $\frac{9}{2U_{2n+1}} \leq \frac{3}{2}$ فإن $U_{2n+2} \leq \frac{3}{2}+\frac{3}{2}$ أي $U_{2n+2}\leq 3$

• نبرهن ثانيا $U_{2n+3}\geq 3$

$$U_{2n+3} = \frac{3U_{2n+2}+9}{2U_{2n+2}} = \frac{3}{2}+\frac{9}{2U_{2n+2}}$$

لدينا $2U_{2n+2}\leq 6$ ومنه $\frac{1}{2U_{2n+2}} \geq \frac{1}{6}$

بالضرب في 9 نجد $\frac{9}{2U_{2n+2}} \ge \frac{3}{2}$

و بإضافة $\frac{3}{2}$ إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{2n+3} \ge \frac{3}{2}+\frac{3}{2}$

اي $U_{2n+3} \ge 3$ ومنه $p_{n+1}$ صحيحة

إذن $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$

ب) إذا كانت $(U_n)$ متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell$

وبالتالي $\ell \le 3 \le \ell$ ومنه نجد $\ell = 3$

3) $U_{n+1}-3 = \frac{3(3-U_n)}{2U_n}$ و بالتالي $|U_{n+1}-3| = \frac{3|U_n-3|}{2U_n}$

بما ان $U_n \ge 2$ فإن $2U_n \ge 4$ ومنه $\frac{3}{2U_n} \le \frac{3}{4}$

وبالضرب في $|U_n-3|$ نجد $\frac{3|U_n-3|}{2U_n} \le \frac{3}{4}|U_n-3|$

اي $|U_{n+1}-3| \le \frac{3}{4}|U_n-3|$

4) ا) نسمي $p_n$ الخاصية " $|U_n-3| \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ "

- $p_0$ صحيحة لأن $|U_0-3| = |2| = 2$ و $2 \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^0$

نفرض أن $p_n$ صحيحة اي $|U_n-3| \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

و نبرهن ان $p_{n+1}$ صحيحة اي $|U_{n+1}-3| \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$.

بضرب طرفي المتباينة $|U_n-3| \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ في $\frac{3}{4}$ نجد $\frac{3}{4}|U_n-3| \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

اي $|U_{n+1}-3| \le 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

منه $p_{n+1}$ صحيحة.

إذن $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$

ب) بما ان فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n-3| = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$

إذن المتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو





## تطبيق 24 الدوال المستمرة و حساب نهاية متتالية

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n$

1) احسب $U_1$ , $U_2$

2) نرمز بـ $f$ إلى الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) برهن انه إذا كان $x \in [0,3]$ فإن $f(x) \in [0,3]$ .

3) استنتج من السؤال الثاني ان :

ا) المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى بـ 3 .

ب) المتتالية $(U_n)$ متزايدة.

4) استنتج ان المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

### الحل ✓

1) $U_1 = -\frac{1}{3}U_0^2 + 2U_0 = \frac{11}{12}$ ، $U_2 = -\frac{1}{3}U_1^2 + 2U_1 = \frac{671}{432}$

2) ا) $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا :

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 3$ .

- إذا كان $x > 3$ فإن $f$ متناقصة تماما.
- إذا كان $x < 3$ فإن $f$ متزايدة تماما.

ب) إذا كان $3 \ge x \ge 0$ فإن $f(3) \ge f(x) \ge 0$

لأن $f$ دالة متزايدة تماما على $[0,3]$ و منه $3 \ge f(x) \ge 0$

إذن $f(x) \in [0,3]$ .

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ ↗ | $3$ | ↘ $-\infty$ |

3) ا) بما ان من اجل كل $x \in [0,3]$ فإن $f(x) \in [0,3]$ فإننا نستطيع تعريف المتتالية $(U_n)$ بـ $U_{n+1} = f(U_n)$

- $(U_n)$ محدودة من الأعلى بـ 3

هذا معناه انه من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 0$ يكون $U_n \le 3$

نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

نسمي $p_n$ الخاصية "$U_n \le 3$"

ومن اجل $n=0$ يكون $U_0=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}\le 3$

ومنه $p_0$ صحيحة.

نفرض ان $p_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n\ge 0$ اي $U_n\le 3$

ونبرهن ان $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+1}\le 3$.

بما ان "$0\le U_n\le 3$" فرضا و $f$ متزايدة تماما على المجال $[0\,,3]$

فإن $0\le f(U_n)\le 3$ اي $U_{n+1}\le 3$

إذن $p_{n+1}$ صحيحة.

وعليه $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$

ب) $U_{n+1}-U_n = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n - U_n$

$= -\frac{1}{3}U_n(U_n-3)$

بما ان $U_n\le 3$ فإن $U_n-3\le 0$ وبالتالي $-\frac{1}{3}U_n(U_n-3)\ge 0$

اي $U_{n+1}-U_n\ge 0$ إذن المتتالية $(U_n)$ متزايدة.

4) بما ان $(U_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

وعليه $\lim U_{n+1}=\lim U_n=\ell$

- حساب $\ell$

بما ان $f$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة عند $\ell$

وعليه $\ell$ هو حل للمعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x$ يكافئ $(x=3)$ او $(x=0)$

$\ell=0$ مرفوض لأن الحد الأول للمتتالية هو $\frac{1}{2}$ و المتتالية متزايدة إذن $\ell=3$ .

## تطبيق 25 الدوال المستمرة و حساب نهايات

$(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}$

1) أ) برهن بالتراجع ان $(U_n)$ متزايدة.

ب) استنتج ان $(U_n)$ محدودة من الأعلى ب 2 . هل المتتالية $(U_n)$ متقاربة ؟

2) أوجد نهاية المتتالية $(U_n)$ .





## ✓ الحل

1) أ) $(U_n)$ متزايدة يعني من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$ يكون $U_{n+1}-U_n\ge 0$

نسمي $p_n$ الخاصية "$U_{n+1}-U_n\ge 0$"

- من اجل $n=0$ يكون $U_1-U_0=\sqrt{3}-1$ و $\sqrt{3}-1>0$

ومنه $p_0$ صحيحة.

- نفرض أن $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$ اي $U_{n+1}-U_n\ge 0$

ونبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة اي $U_{n+2}-U_{n+1}\ge 0$.

المتباينة $U_{n+1}-U_n\ge 0$ تعني $U_{n+1}\ge U_n$

بإضافة 2 إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{n+1}+2\ge U_n+2$

بجذر الطرفين نجد $\sqrt{U_{n+1}+2}\ge\sqrt{U_n+2}$

اي $U_{n+2}\ge U_{n+1}$

ومنه $U_{n+2}-U_{n+1}\ge 0$ إذن $p_{n+1}$ صحيحة.

ومنه $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$

ب) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{2+U_n}-U_n=\frac{2+U_n-U_n^2}{U_n+\sqrt{2+U_n}}=\frac{-(U_n-2)(U_n+1)}{U_n+\sqrt{2+U_n}}$

- بما ان $U_n+\sqrt{2+U_n}>0$ و $U_n+1>0$ و $U_{n+1}-U_n\ge 0$ فإن $-(U_n-2)\ge 0$

ومنه نستنتج $U_n\le 2$ وهذا يعني أن المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى بـ 2

- بما ان $(U_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

2) بما ان $(U_n)$ متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty}U_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}U_n=\ell$

- بما ان الدالة $f:x\mapsto\sqrt{2+x}$ مستمرة عند العدد الحقيقي $\ell$ فإن $\ell$ جذر للمعادلة $x=f(x)$

$x=f(x)$ يكافئ: $x^2-x-2=0$ يكافئ: $x=2$ او $x=-1$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell=2$ .

# تمارين و مسائل

1- المتتالية $(U_n)$ معرفة من اجل $n \geq 3$ بـ $U_n=\frac{4n+2}{n-2}$ لها نهاية عند 4 .
اوجد العدد الطبيعي $n_0$ بحيث من اجل $n > n_0$ يكون $U_n \in ]3.99 , 4.01[$

2- $(U_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n=n^2-n$ لها نهاية $+\infty$
اوجد عدد طبيعي $n_0$ بحيث من اجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n \in ]10^8 , +\infty[$

3- $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+ .... + \frac{1}{3^{n+1}}$
احسب $U_n$ من اجل كل عدد طبيعي $n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$ .

4- $(U_n)$ المتتالية معرفة من اجل كل $n$ بالعبارة $U_n=\frac{1}{n!}$
1) احسب $U_1$ , $U_2$ , $U_3$ , $U_4$ , $U_5$ , $U_6$
2) تحقق انه من اجل كل $n \geq 1$ يكون $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$
3) استنتج نهاية $(U_n)$ .

5- $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_n=n+1-\sin n$
بين من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $n \leq U_n \leq n+2$ ثم استنتج نهاية $(U_n)$ .

6- $(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_n=\frac{n^3}{n!}$ من اجل كل $n \geq 1$
1) احسب الحدود السبعة الأولى .
2) ا) تحقق انه من اجل كل $n \geq 5$ يكون $n! \geq (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
ب) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$ .





7- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية $(U_n)$ :
ا) $U_n=\frac{-n+5}{2n+1}$ ب) $U_n=\frac{2n+1}{3n+1}$ جـ) $U_n=-n^2+\frac{3}{2n+2}$
د) $U_n=\frac{6n^2-3n+9}{n^2+n+3}$ و) $U_n=\frac{7n+5}{2n^2+3}$ ي) $U_n=\frac{6n^2+2}{7n+3}$

8- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية $(U_n)$ :
ا) $U_n=\sqrt{\frac{3}{2n+1}}$ ب) $\sin\left(\frac{3\pi n}{2n+1}\right)$ جـ) $U_n=1-\frac{3}{n!}$
د) $U_n \frac{\sqrt{n}+2}{n+3}$ و) $U_n=\sqrt{2n^4+n^3}-\sqrt{2n^4}$ ي) $U_n=\frac{5n-25n^2+1}{\sqrt{n^2+6}}$

9- اوجد نهاية كل متتالية من المتتاليات $(U_n)$ ، $(V_n)$ ، $(W_n)$ ، $(t_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم بالعبارات التالية :
$$U_n=\frac{n^2+2}{n+3} \ , \ V_n=\frac{U_n}{n+1} \ , \ W_n=U_n-n+2 \ , \ t_n=\frac{V_n-1}{W_n-1}$$

10- $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ:
$U_0=4$ و $U_{n+1}=\frac{1}{4}U_n+5$ و $V_n=U_n-\frac{20}{3}$
1) ا) برهن أن المتتالية $(V_n)$ هندسية. ب) احسب $V_n$ ثم $U_n$ بدلالة $n$ .
2) نضع $S_n=V_0+V_1......+V_n$ و $S'_n=U_0+U_1+ \ ...... \ +U_n$
احسب $S_n$ و $S'_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج نهاية المتتاليتين $(S_n)$ و $(S'_n)$

11- في كل حالة من الحالات التالية عين بيانا الحدود الأولى للمتتاليات المقترحة ثم خمن اتجاه تغير و نهاية هذه المتتالية :
ا) $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-2 \end{cases}$ ، ب) $\begin{cases} U_1=2 \\ U_{n+1}=U_n+5 \end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=-\frac{1}{3}U_n \end{cases}$

12- ادرس تقارب المتتالية $(U_n)$ في كل حالة من الحالات التالية :
ا) $U_n=2n^2-3n+4$ ، ب) $U_n=\frac{n^3+2n}{n^2+n}$ ، جـ) $U_n=5(0.3)^n$

د) $U_n = \frac{5^n}{7^n}$ ، و) $U_n = \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) \times (0{,}2)^n$

13 - $(U_n)$ متتالية معرفة من اجل كل $n \geq 4$ بـ $U_n = \frac{1}{n^2-5n+6}$

بين أن $(U_n)$ محدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{2}$

( يمكنك الاستعانة بدراسة الدالة $f(x)=x^2-5x+6$ ).

14 - في كل حالة من الحالات التالية هل المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأعلى ؟ من الأسفل ؟ محدودة ؟

أ) $U_n=\cos n$ ، ب) $U_n = 3-\frac{1}{n}$ ، جـ) $U_n=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$

د) $U_n=\sqrt{5n+3}$ ، و) $U_n = n+2+\cos n$

15 - ادرس تقارب أو تباعد كل متتالية من المتتاليات التالية باستعمال نظريات الحصر :

أ) $U_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sin(3n)$ ، ب) $U_n=\frac{n+1}{3+\cos 2n}$

جـ) $U_n=\frac{n-\sin n}{n^2+3}$ ، د) $U_n = \frac{2^n+1}{3^{n+2}-1}$

16 - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعبارة $U_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+ \ldots\ldots +\frac{1}{n^2}$

1) بين ان المتتالية $(U_n)$ متزايدة.

2) أ) بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ لدينا $U_n \leq 2-\frac{1}{n}$

ب) ماذا تستنتج فيما يخص المتتالية $(U_n)$ ؟

17 - من اجل كل عدد طبيعي $n$ نضع $U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1) أوجد العددين الحقيقيين $A$ و $B$ بحيث انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$ .

2) من اجل كل عدد طبيعي $n$ نضع $S_n = U_0+U_1+ \ldots\ldots+U_n$

عين عبارة $S_n$ بدلالة $n$ ثم اوجد نهاية المتتالية $(S_n)$ .





18 - ادرس تقارب المتتالية $(U_n)$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $U_n=\frac{n!}{2^n-1}$ ، ب) $U_n=\frac{n!}{4^n}$ ، جـ) $U_n=\frac{2^n+3}{4^n}$

19 - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases}U_0=2\\ 4U_{n+1}=U_n+3\end{cases}$

1) عين الستة الحدود الأولى و عين القيمة $\ell$ التي تقترب منها هذه الحدود.

2) لتكن $(V_n)$ متتالية معرفة بـ $V_n=U_n-\ell$ برهن ان $(U_n)$ متقاربة نحو $\ell$ .

20 - اجب بنعم أو لا عن كل سؤال من الأسئلة المطروحة مبرر الإجابة.

لتكن $(U_n)$ متتالية معرفة بحدها الأول $U_0$ ينتمي إلى مجال $]1+\infty[$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1}=\sqrt{3U_n-2}$ من أجل كل عدد طبيعي $n$

1) $(U_n)$ رتيبة

2) $(U_n)$ محدودة من الأسفل بالواحد.

3) إذا كان $U_0\in]1\,,\,2[$ فإن $(U_n)$ متقاربة نحو 1.

4) إذا كان $U_0\in]1\,,\,2[$ فإن $(U_n)$ متقاربة نحو 2.

5) إذا كان $U_0\in]2,+\infty[$ فإن $(U_n)$ متقاربة نحو 2

21 - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=U_n-\frac{1}{3}(U_n)^3$

1) بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n\in[0\,,\,1]$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)$ .

3) بين ان المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

22 - لتكن المتتالية $(U_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n}{2+U_n^2}$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n > 0$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_{n+1} < \frac{U_n}{2}$ ثم استنتج أن $U_n < \frac{U_0}{2^n}$

3) بين ان المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

23 - لتكن $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) برهن انه من أجل كل $n\ge 1$ يكون $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le U_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2) ما هي نهاية المتتالية $(U_n)$ ؟

**24** - $(U_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

1) برهن انه من أجل كل $n\ge 1$ يكون $\frac{1}{2\sqrt{n}} \ge U_n \ge \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

2) ما هي نهاية المتتالية $(U_n)$ ؟

3) لتكن المتتالية $(V_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$ بالعبارة :

$V_n=\frac{u_1+u_2+\dots+U_n}{\sqrt{n}}$ ، ما هي نهاية $(V_n)$ ؟

**25** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{2}{3}(U_n+1)$

1) برهن ان المتتالية $(V_n)$ المعرفة من أجل كل $n$ بـ $V_n=2-U_n$ هندسية.

2) استنتج عبارة $U_n$ بدلالة $n$ ثم نهاية $(U_n)$.

**26** - $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=-2$ و $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n-1$ و $V_n=U_n+3$

1) برهن ان $(V_n)$ هندسية.

2) عبر عن $V_n$ ثم $U_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج نهاية $(U_n)$.

3) $(S_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $S_n=U_0+U_1+\dots+U_n$

عبر عن $S_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج نهاية $(S_n)$ .

**27** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=2$ و $U_{n+1}=2U_n-\frac{1}{3}$ و $(V_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $V_n=U_n-\alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

1) أوجد $\alpha$ بحيث $(V_n)$ هندسية.

2) هل $(V_n)$ متقاربة.

3) عبر عن $V_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب $S_n=V_0+V_1+\dots V_n$ ثم استنتج قيمة

$S'_n=U_0+U_1+\dots+U_n$

**28** - ندرس عدد البكتيريا المسببة لمرض التفويد في لتر واحد من ماء يحتوي في البداية على 300 بكتيريا. لاحظنا أنه في كل دقيقة يزداد عدد البكتيريا بالمعامل 1,0372 مع العلم أنه في كل دقيقة تموت بكتيريا واحدة.





1) إذا رمزنا بـ $U_n$ إلى عدد البكتيريا الحية حتى الدقيقة $n$ أكتب $U_{n+1}$ بدلالة $n$

2) نضع $V_n=U_n-\frac{1}{0.037}$

أ) بين أن $(V_n)$ هندسية ثم أحسب حدها العام بدلالة $n$ .

ب) ما هو عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

3) نريد تحسين هذه الدراسة بحيث ولا بكتيريا تموت خلال التجربة ولتكن $W_n$ عدد البكتيريا الموجودة خلال $n$ دقيقة.

عبر عن $W_n$ بدلالة $n$ ثم احسب عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

كم عدد البكتيريا التي تم انقاضها ؟

**29** - $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+2}$$

$$V_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+2}$$

هل المتتاليتان $(U_n)$ و $(V_n)$ متجاورتان ؟

**30** - $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$

و $V_n=U_n+\frac{1}{n!}$

1) بين أن المتتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ متجاورتان.

2) أحسب $U_7$ و $V_7$ ثم استنتج قيمة مقربة للنهاية المشتركة $\ell$ .

3) بين أن $\ell$ ليس عددا ناطقا.(استعمال البرهان بالخلف)

ثم تحقق من أن $U_6 < \ell < V_6$

**31** - $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=-1$ و $V_0=2$ .

و $V_{n+1}=\frac{U_n+4V_n}{5}$ و $V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}$

1) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أن $U_n < V_n$

ب) برهن أن المتتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ متجاورتان .

2) أوجد العددين الحقيقيين المختلفين $a$ و $b$

بحيث أن المتتاليتين $(S_n)$ و $(t_n)$ المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ :

$t_n=U_n+bV_n$ و $S_n=U_n+aV_n$ هندسيتان (ثابتتان).

3) أ) عبر عن $S_n$ و $t_n$ بدلالة $n$ .

ب) احسب نهاية المتتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ .

**32** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $I\!N$ بـ $U_0=-3$ و $U_{n+1}=\dfrac{U_n-8}{2U_n-9}$

1) أ) مثل بيانيا الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{x-8}{2x-9}$

ب) استعمل المنحنى البياني للدالة $f$ لتخمين طبيعة المتتالية $(U_n)$ .

2) برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n < 1$

3) برهن ان المتتالية $(U_n)$ متزايدة ومتقاربة

4) $(V_n)$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $V_n=1-U_n$

برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $V_{n+1} < \dfrac{1}{7}V_n$ ثم استنتج نهاية $(V_n)$

5) أ) ما هي نهاية المتتالية $(U_n)$ ؟

ب) أوجد العدد الطبيعي $n_0$ بحيث من اجل كل عدد طبيعي $n > n_0$ يكون $U_n > 0{,}99$

---

**33** - $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان بـ $U_0=2$ ، $U_{n+1}=\dfrac{U_n^2+5}{2U_n}$ و $V_n=\dfrac{U_n-\sqrt5}{U_n+\sqrt5}$

1) أ) برهن ان من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$ يكون $V_{n+1}=V_n^2$

ب) استنتج انه من اجل كل $n\ge 0$ يكون $V_n=(V_0)^{2^n}$

2) أ) احسب $V_0$ ثم برهن ان $|V_0|\le\dfrac{1}{16}$

ب) عين نهاية المتتالية $(V_n)$ ، جـ) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$ .

---

**34** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $I\!N^*$ بـ $U_1=\dfrac{3}{2}$ و $U_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(U_n+\dfrac{2}{U_n}\right)$

1) برهن انه من اجل كل $n\ge1$ يكون $U_n > 0$

2) برهن انه من اجل كل $n\ge1$ يكون $U_{n+1}-\sqrt2=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(U_n-\sqrt2)^2}{U_n}$

ثم استنتج انه من اجل كل $n\ge1$ يكون $U_n > \sqrt2$

3) أ) برهن انه من اجل كل $n\ge1$ يكون $U_{n+1}-\sqrt2=\dfrac{1}{2}\left(U_n-\sqrt2\right)+\dfrac{1}{U_n}-\dfrac{1}{\sqrt2}$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل $n\ge1$ لدينا $U_{n+1}-\sqrt2\le\dfrac{1}{2^n}$

4) بين ان المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

---

**35** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $I\!N$ بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\sqrt{6+U_n}$

1) احسب $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ .





2) برهن أن $(U_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 3 ماذا تستنتج ؟

3) ما هي نهاية المتتالية $(U_n)$ ؟ ( لحساب النهاية استعن بالدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{x+6}$ )

---

**36** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $I\!N$ بـ $U_0 > \dfrac{-5}{4}$ و $U_{n+1}=\sqrt{5+4U_n}$

1) ارسم $(C_f)$ بيان الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{5+4x}$ ثم عين نقطة تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$

2) نفرض في هذا السؤال ان $U_0=6$ ،

أ) برهن ان المتتالية $(U_n)$ محدودة من الأسفل.

ب) ادرس تغيرات المتتالية $(U_n)$ ثم استنتج ان $(U_n)$ متقاربة و احسب نهايتها.

3) أ) برهن ان النتائج المحصل عليها سابقا (في السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $U_0 > 5$

ب) هل نتائج ( السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $0 < U_0 < 5$ ؟

جـ) ماذا تصبح المتتالية في حالة $U_0=5$ ؟

---

**37** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $I\!N$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=1+\dfrac{1}{U_n}$

1) أ) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $U_n > 0$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل $n\ge1$ يكون $2\ge U_n\ge\dfrac{3}{2}$

2) لتكن $f$ الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$

برهن انه من اجل كل $x\ge\dfrac{3}{2}$ ومن اجل كل $y\ge\dfrac{3}{2}$ يكون ،

$$|f(x)-f(y)|\le\frac{4}{9}|x-y| \quad ......\ (1)$$

3) أ) إذا كانت المتتالية $(U_n)$ متقاربة فما هي قيمة نهايتها $\ell$ ؟

ب) برهن باستعمال (1) انه من اجل كل $n\ge1$ يكون $|U_{n+1}-\ell|\le\dfrac{4}{9}|U_n-\ell|$

جـ) استنتج بالتراجع أن $|U_n-\ell|\le\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}|U_1-\ell|$

د) برهن عندئذ ان $(U_n)$ متقاربة نحو $\ell$ .

---

**38** - $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان معرفتان من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ :

$$U_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\ ....\ +\sin\frac{n}{n^2}$$

$$V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

1) بين ان المتتالية $(V_n)$ متقاربة نحو $\frac{1}{2}$ .

2) ا) بين ان كل من الدوال $f : x \mapsto x - \sin x$

$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x \quad , \quad g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

تاخذ قيم موجبة او معدومة على المجال $[0, +\infty[$ . ( استعمل تغيرات كل دالة)

ب) تحقق انه من اجل كل $n \geq 1$ يكون $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$

ثم استنتج من (ا) أن $V_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq U_n \leq V_n$ من اجل كل $n \geq 0$

جـ) بين ان المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

39 - $(U_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{\sqrt{(U_n - 1)^2 + 1}} + 1$ .

1) تحقق انه من اجل كل $n \geq 0$ يكون $U_n \rangle 1$

ثم برهن ان المتتالية $(U_n)$ متناقصة.

3) برر تقارب المتتالية $(U_n)$ .

4) احسب الخمسة الحدود الأولى (قيم دقيقة) ما هو التخمين فيما يخص عبارة $U_n$ ؟

5) ما هي نهاية المتتالية $(U_n)$ ؟







الدرس 7

# الدَّوالُ الأَصْلِيَةُ وحِسَابُ التكامُلاتِ

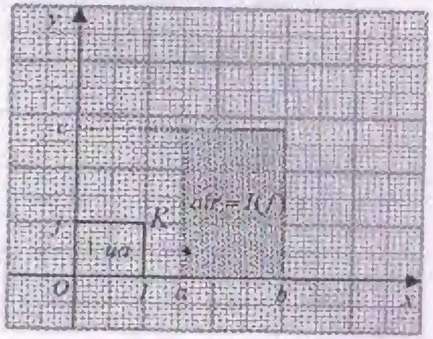
## 1 - مفهوم التكامل على مجال

### 1 - 1 تكامل دالة درجية

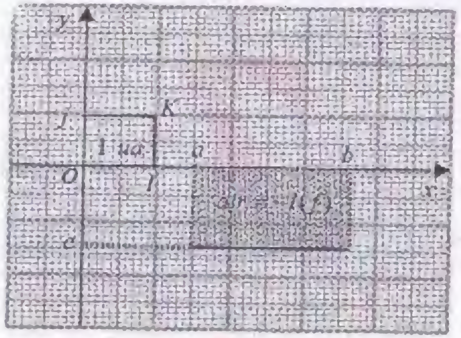
نقول ان $f$ دالة درجية على المجال $[a, b]$ عندما نستطيع ايجاد تقسيم لـ $[a, b]$ مشكل من الأعداد الحقيقية $x_0 = a$ ، $x_1$ ، $x_2$ ، ... ، $x_n = b$ بحيث $x_0 \langle x_1 \langle x_2 \langle \dots \langle x_n$ و بحيث الدالة $f$ ثابتة على كل مجال من الشكل $]x_{i-1}, x_i[$ حيث $n \geq i \geq 1$ .

حالة دالة ثابتة على $[a, b]$

$f$ دالة معرفة على مجال $[a, b]$ بحيث من اجل كل $x$ من $]a, b[$ لدينا $f(x) = c$ .
القيمتان $f(a)$ و $f(b)$ يمكن ان تكونا مختلفتين عن العدد $c$ .
بالتعريف تكامل الدالة $f$ على المجال $[a, b]$ هو العدد الحقيقي $I(f)$
بحيث $I(f) = (b - a) \times c$

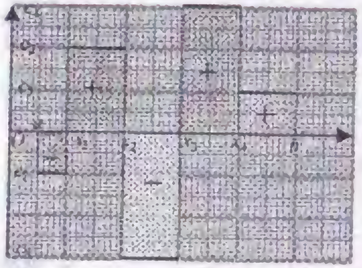



لما $c \rangle 0$ تكامل الدالة $f$ هو مساحة المستطيل الملون.وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$




لما $c \langle 0$ تكامل الدالة $f$ هو عكس مساحة المستطيل الملون.

**حالة دالة درجية على المجال$[a, b]$**



إذا كان من أجل كل $x$ من $]x_{i-1}, x_i[$

لدينا $f(x)=c_i$ فإن تكامل $f$ على $[a, b]$

هو العدد $I(f)$ المعرف بـ:

$$I(f)=(x_1-x_0)\,c_1+(x_2-x_1)\,c_2+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,c_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,c_i$$

التكامل $I(f)$ على المجال $[a, b]$

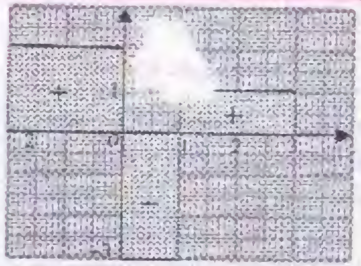
نرمز له بـ $\int_a^b f(t)\,dt$ و الذي يقرا تكامل من $a$ إلى $b$ لـ $f(t)$ تفاضل $t$ .

**ملاحظة**

بما أن المتغير $t$ أبكم نستطيع استبداله بأي متغير آخر و عليه ،

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\ldots$$

**مثال -**



$g$ دالة درجية معرفة على المجال$[-2, 3]$

بـ:
$$\begin{cases} g(x)=2 & , 0 \geq x \geq -2 \\ g(x)=-3 & , 1 \geq x \geq 0 \\ g(x)=1 & , 3 \geq x \rangle 1 \end{cases}$$





$(\gamma_g)$ منحناها في معلم متعامد و متجانس

لنحسب $I(g)$

$$I(g)=(0+2)\times 2+(1-0)\times(-3)+(3-1)\times 1$$
$$=+4-3+3=4$$

## 1 - 2 تكامل دالة مستمرة

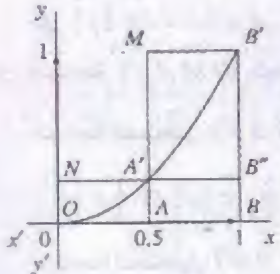
### حصر مساحة

**مثال -**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0, 1]$ بـ $f(x)=x^2$ و $(\gamma)$ قوسا من القطع المكافئ $(\rho)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

نريد تعيين حصر لمساحة حيز من المستوى تحت المنحني الممثل للدالة $f$ المحدد بالقوس $(\gamma)$

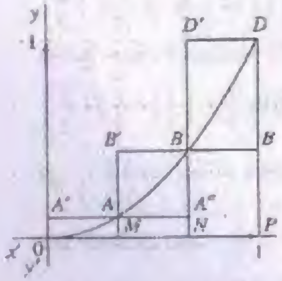
و محور الفواصل $(x x')$ و المستقيم ذي المعادلة $x=1$ و لتكن $\mathcal{A}$ .




1) نقوم بتقسيم المجال $[0, 1]$ إلى مجالين لهما نفس الطول 0,5 .

على المجال $[0, 0{,}5]$ الساحة التي نبحث عنها محصورة بين 0 و مساحة المستطيل $AONA'$ و على المجال $[0{,}5, 1]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $ABB''A'$ و $ABB'M$ .

اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ على المجال$[0, 1]$.




2) نقوم بتقسيم المجال $[0, 1]$ إلى ثلاثة مجالات طول كل منها $\frac{1}{3}$ و عليه فالمساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $AA''NM$ و $B'BNM$ .

على المجال $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

- اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ ثم قارنه مع الحصر المحصل عليه في السؤال 1

3) نقسم المجال $[0,1]$ إلى $n$ مجال وطول كل منها $\frac{1}{n}$

و لنعتبر المجال $I=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ مع $k$ عدد طبيعي محصور بين 0 و $n-1$ .

أ) اعط حصرا لمساحة حيزمن المستوي تحت المنحني الممثل للدالة $f$ على $I$ بدلالة $n$ و $k$ .

ب) اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ مبينا أن $\mathcal{A}$ محصورة بين متتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ بحيث $V_n \ge \mathcal{A} \ge U_n$ اوجد عبارتهما.

( يعطى $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(3n+1)}{6}$ )

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\mathcal{A}$ ؟

## ✓ الحل

1) مساحة $(AOA'N)$ تساوي $0{,}5\times f(0{,}5)$ ومنه:

$0{,}5\times f(0{,}5)\ge \mathcal{A}_0\ge 0$ ... (1)

مساحة $(ABB'M)$ تساوي $0{,}5\times f(1)$ ومنه:

(2) ... $0{,}5\times f(1)\ge A_1\ge 0{,}5\times f(0{,}5)$

بجمع طرفي (1) و (2) نجد $0{,}5\left(f(0{,}5)+f(1)\right)\ge \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1\ge 0{,}5\times f(0{,}5)$

أي $0{,}5\left((0{,}5)^2+1^2\right)\ge\mathcal{A}\ge 0{,}5\times(0{,}5)^2$ بالحساب نجد $0{,}625\ge\mathcal{A}\ge 0{,}125$ .

2) مساحة $(OMAA')$ تساوي $\frac13\times f(\frac13)$ و منه $\frac13 f(\frac13)\ge\mathcal{A}_0\ge0$ ... (1).

مساحة المستطيل $(MNBB')$ تساوي $\frac13\times f(\frac23)$ ومنه،

$\frac13 f\left(\frac23\right)\ge\mathcal{A}_1\ge\frac13 f\left(\frac13\right)$ .....(2).

مساحة المستطيل $(NPDD')$ تساوي $\frac13\times f(1)$ ومنه:

$\frac13 f(1)\ge\mathcal{A}_2\ge\frac13 f\left(\frac23\right)$ ......(3).

بجمع حدود المتباينات (1) و (2) و (3) نجد:

$$\frac13 f\left(\frac13\right)+\frac13 f\left(\frac23\right)+\frac13 f(1)\ge \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2\ge\frac13 f(0)+\frac13 f\left(\frac13\right)+\frac13 f\left(\frac23\right)$$

أي $\frac13\left[f\left(\frac13\right)+f\left(\frac23\right)+f(1)\right]\ge\mathcal{A}\ge\frac13\left[f(0)+f\left(\frac13\right)+f\left(\frac23\right)\right]$

بعد الحساب نجد $\frac{14}{3^3}\ge\mathcal{A}\ge\frac{5}{3^3}$ أي $0{,}51\ge\mathcal{A}\ge0{,}18$ .

من السؤالين (1) و (2) نلاحظ أن التقسيم الثاني أعطى لنا حصرا أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال (1) و عليه كلما كانت التقسيمات كثيرة كان حصر المساحة $\mathcal{A}$ أدق.





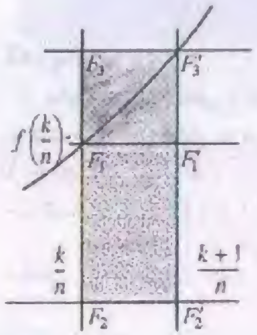


3) أ) نرمز بـ $\mathcal{A}_k$ إلى مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة $f$ على المجال $I$ ،
هذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيلين $F_1F_1'F_2F_2'$ و $F_2F_2'F_3F_3'$ .

مساحة $(F_1F_1'F_2F_2')$ تساوي $\frac1n\times f\left(\frac kn\right)$

مساحة $(F_2F_2'F_3F_3')$ تساوي $\frac1n\times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

إذن $\frac1n f\left(\frac{k+1}{n}\right)\ge\mathcal{A}_k\ge\frac1n f\left(\frac kn\right)$ .




نضع $g_n(t)=f\left(\frac kn\right)$ و $h_n(t)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

مع $k$ ينتمي إلى $\{0,1,...,n-1\}$ و $t\in\left]\frac kn,\frac{k+1}{n}\right[$ .

ب) $\frac1n f\left(\frac1n\right)\ge\mathcal{A}_0\ge\frac1n f(0)$

$\frac1n f\left(\frac2n\right)\ge\mathcal{A}_1\ge\frac1n f\left(\frac1n\right)$

$\vdots$

$\frac1n f\left(\frac nn\right)\ge\mathcal{A}_{n-1}\ge\frac1n f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع حدود المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد:

$$\frac1n\left[f\left(\frac1n\right)+f\left(\frac2n\right)+...+f\left(\frac nn\right)\right]\ge\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+...+\mathcal{A}_{n-1}\ge\frac1n\left[f(0)+f\left(\frac1n\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

و بما أن $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+..+\mathcal{A}_{n-1}$ فإنه نستنتج:

$$\frac1n\left[\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+....+\frac{n^2}{n^2}\right]\ge\mathcal{A}\ge\frac1n\left[\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+...+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]\ge\mathcal{A}\ge\frac1{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$$

بوضع $U_n=\frac1{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$ و $V_n=\frac1{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]$ .

تصبح المتباينة السابقة كما يلي $V_n\ge\mathcal{A}\ge U_n$ .

$U_n=\frac1{n^3}\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$ و $V_n=\frac1{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$U_n$ هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية $g_n$ و لتكن $I(g_n)$

$V_n$ هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية $h_n$ و لتكن $I(h_n)$

جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac26=\frac13$

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac26=\frac13$

بما ان $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$ و $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3}$ .

فإن حسب نظرية الحصر نستنتج $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$ .

يمكننا التأكد من أن $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان متجاورتان و عليه فالمتتاليتان $(U_n)$ و $(V_n)$ متقاربتين نحو نفس النهاية $\ell = \frac{1}{3}$ ، نقول ان هذه النهاية المشتركة $\ell$ هي تكامل $f$ على المجال $[0,1]$ و نرمز له بـ $\int_0^1 f(t)\,dt$ و نكتب $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{3}$

## تعريف

$f$ دالة مستمرة على $[a,b]$ ، نتقبل انه توجد متتاليتين لدالتين درجيتين $(g_n)$ و $(h_n)$ بحيث من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$ و من اجل $t$ من $[a,b]$

$h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$ ... (1).

المتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية $\ell$ ... (2)

نسمي $\ell$ تكامل $f$ على $[a,b]$ و نكتب $\ell = \int_a^b f(t)\,dt$

### ملاحظة

1) إذا كانت $(s_n)$ و $(S_n)$ متتاليتين لدالتين درجيتين لهما نفس خصائص $(g_n)$ و $(h_n)$ فإن $\ell$ هي كذلك نهاية $I(s_n)$ و $I(S_n)$ .

2) تجاور المتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$ .

- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى $2^n$ مجال طول كل منها $\frac{b-a}{2^n}$ نتحصل دائما على متتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متجاورتين و هذا مهما كانت طبيعة $f$ . ( $f$ رتيبة أو غير رتيبة، موجبة او سالبة).

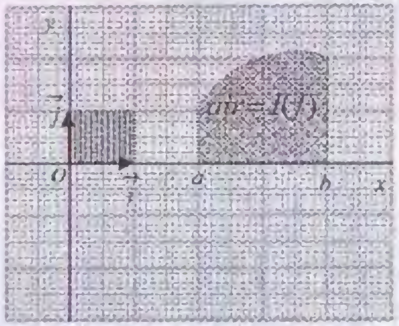
- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى $n$ مجال طول كل منها $\frac{b-a}{n}$ فالمتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ المحصل عليهما متقاربتان نحو $\int_a^b f(t)\,dt$ لكن حتى و لو كانت $f$ رتيبة على $[a,b]$ لسنا متأكدين من تجاور هاتين المتتاليتين.

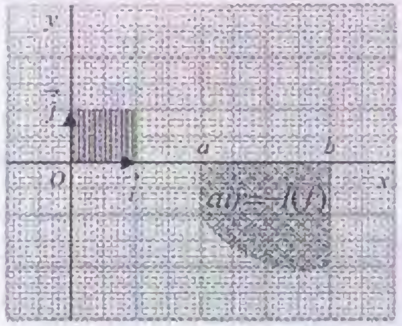
3) إذا كانت الدالة $f$ مستمرة و موجبة فإن العدد $I(f)$ موجب و يعبر عن مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة $f$ .

- إذا كانت $f$ مستمرة و سالبة فإن العدد $I(f)$ يعبر عن نظير مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة $f$ .





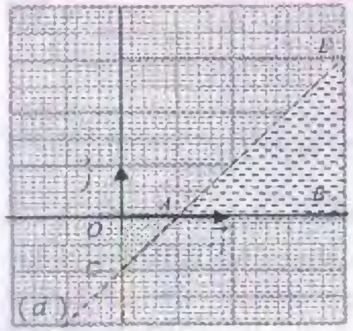



## تمرين تدريبي 1

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x) = 2x - 1$ .

احسب التكاملين التاليين $J = \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)\,dt$ ، $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$




### ✓ الحل

الدالة $f$ ممثلة بالمستقيم $(d)$ الذي يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ولتكن $B(2,0)$ من محور الفواصل لتكن $E$ نقطة من $(d)$ فاصلتها 2 و ترتيبها 3 .

$(d)$ يقطع محور التراتيب في $C(0, -1)$

- على المجال $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ الدالة $f$ موجبة

ومنه $J$ هو مساحة المثلث $ABE$ والتي تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة المساحات وبالتالي $J = \frac{9}{4}$ .

- على المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ الدالة $f$ سالبة ومنه $I$ نظير مساحة المثلث $OCA$ التي هي $\frac{1}{4}$

ومنه $I = -\frac{1}{4}$ .

## تمرين تدريبي 2

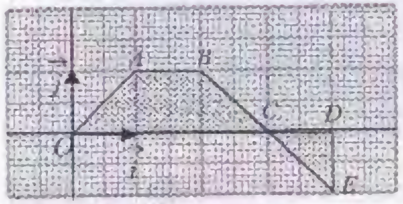
$f$ دالة معرفة على المجال $[0,4]$ بـ

$$\begin{cases} f(x) = x & , x \in [0, 1] \\ f(x) = 1 & , x \in [1, 2] \\ f(x) = -x+3 & , x \in [2, 4] \end{cases}$$

احسب التكاملين $I$ و $J$ التاليين $I=\int_{0}^{3} f(t)\,dt$ ، $J=\int_{3}^{4} f(t)\,dt$

ثم احسب $I+J$ .

✓ الحل




- على المجال $[0,3]$ الدالة $f$ موجبة

ومنه $I$ هو مساحة شبه المنحرف $OABC$

والتي تساوي $\frac{(3+1)\times 1}{2}$ أي 2

ومنه $I=2$ وحدة المساحات

- على المجال $[3,4]$ الدالة $f$ سالبة

ومنه $J$ هو نظير مساحة المثلث $CED$ التي تساوي $\frac{1}{2}$ ومنه $J=\frac{-1}{2}$

إذن $I+J=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ .

# ❷ - خواص التكامل

مبرهنة

كل دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ تقبل تكاملا على هذا المجال.

## 2 - 1 تمديد تعريف التكامل إلى $a$ و $b$ كيفيين

عرفنا تكامل دالة درجية او مستمرة على مجال $[a,b]$ مع $a<b$ و الآن إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ ، و كان $a$ و $b$ عددين من $I$ بحيث $a\geq b$

نضع التعريف التالي :

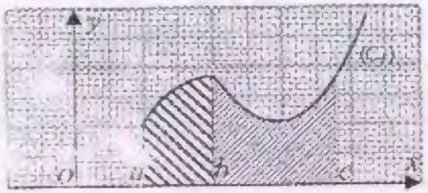
لما $a>b$ تكون $\int_{a}^{b} f(t)\,dt=-\int_{b}^{a} f(t)\,dt$ ولما $a=b$ تكون $\int_{b}^{a} f(t)\,dt=0$

## 2 - 2 علاقة شال

مبرهنة

$f$ دالة مستمرة على $I$ . مهما تكن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ من $I$

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt+\int_{b}^{c} f(t)\,dt=\int_{a}^{c} f(t)\,dt$$



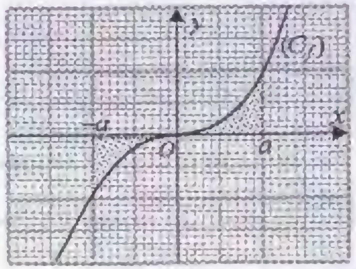


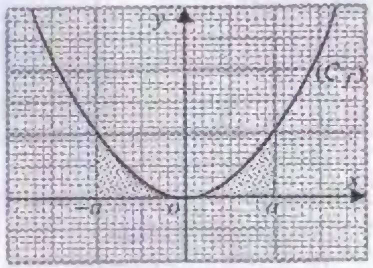



نتيجة

1) اذا كانت $f$ زوجية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

2) إذا كان $f$ فردية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=0$




الإثبات

حسب علاقة شال لدينا $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=\int_{-a}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

1) إذا كانت $f$ زوجية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ ومنه $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

2) إذا كانت $f$ فردية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

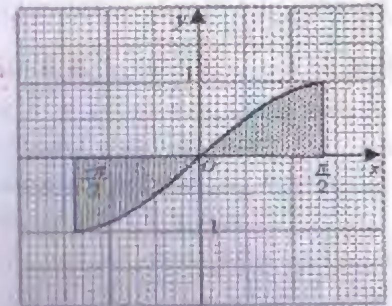
$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=-\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

و منه $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=0$

مثال ❶

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\sin x$

احسب التكامل $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$

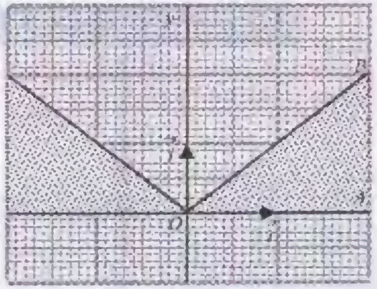



✓ الحل

الدالة $f$ فردية على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=0$ .

مثال 2




$f$ دالة معرفة على $IR$ ب $f(x)=|x|$

احسب التكامل $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$

✓ الحل

الدالة $f$ زوجية على المجال $[-2\ ,\ 2]$

ومنه $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt$

وبما أن $f$ موجبة على المجال $[0\ ,\ 2]$

فإن $\int_{0}^{2} f(t)\,dt$ تساوي مساحة المثلث $OAB$ التي هي 2 وحدة المساحات

وعليه $I=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt=2\times 2=4$ .



## 2 - 3 خطية التكامل

**مبرهنة**

$f$ و $g$ دالتان مستمرتان على مجال $I$ و $\lambda$ عدد حقيقي كيفي.
مهما يكن العددان الحقيقيان $a$ و $b$ من $I$ لدينا

$$\int_{a}^{b}(f+g)(t)\,dt=\int_{a}^{b} f(t)\,dt+\int_{a}^{b} g(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_{a}^{b}\lambda f(t)\,dt=\lambda\int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

**الإثبات**

نثبت المساواة $\lambda I(f)=I(\lambda f)$ أي $\int_{a}^{b}\lambda f(t)\,dt=\lambda\int_{a}^{b} f(t)\,dt$

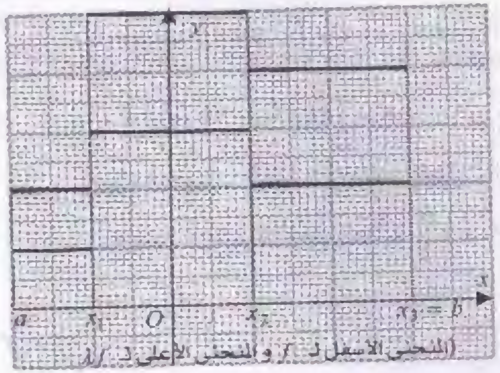
1) نفرض أن الدالة $f$ درجية على المجال $[a\ ,\ b]$ إذن يوجد تقسيم لـ $[a\ ,\ b]$ مع $x_0=a$ و $x_n=b$ و بحيث من أجل كل $x$ من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$ : $f(x)=c_i$ مع $1\le i\le n$
عندئذ من أجل كل $x$ من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$ ، $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda c_i$ و عليه $\lambda f$ ثابتة على كل مجال من هذه المجالات
إذن فالدالة $\lambda f$ درجية.

$$I(\lambda f)=\lambda c_1(x_1-x_0)+\dots+\lambda c_n(x_n-x_{n-1})$$
$$=\lambda\left[c_1(x_1-x_0)+\dots+c_n(x_n-x_{n-1})\right]=\lambda I(f)$$





2) نفرض أن $f$ دالة مستمرة على المجال $[a\ ,\ b]$
عندئذ من أجل كل $n$ من $IN^*$ توجد دالتان درجيتان $g_n$ و $h_n$ بحيث من أجل كل $t$ من $[a\ ,\ b]$ يكون $h_n(t)\ge f(t)\ge g_n(t)$
و $I(f)$ النهاية المشتركة للمتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$.




- لما $\lambda\ge 0$ فإنه من أجل كل $t$ من $[a\ ,\ b]$ و كل $n$ من $IN^*$ يكون: $\lambda h_n(t)\ge\lambda f(t)\ge\lambda g_n(t)$

لنبين أن المتتاليتين $(I(\lambda g_n))$ و $(I(\lambda h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية بالتعريف تكون $I(\lambda f)$ هي النهاية المشتركة.

بما أن المتتالية $(I(g_n))$ متقاربة نحو $I(f)$ فإن المتتالية $(\lambda I(g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$ . و بما أن $g_n$ و $\lambda g_n$ دالتان درجيتان فإن $I(\lambda g_n)=\lambda I(g_n)$ من أجل كل $n\ge 1$

و بالتالي $(I(\lambda g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$ .

بنفس الكيفية نبين أن $(I(\lambda h_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$

إذن $I(\lambda f)=\lambda I(f)$ .

- بضرب المتباينة $h_n(t)\ge f(t)\ge g_n(t)$ بالعدد $\lambda$ لما $\lambda<0$ نجد $\lambda g_n(t)\ge\lambda f(t)\ge\lambda h_n(t)$ ونبرهن بنفس الكيفية السابقة أن $\lambda I(f)=I(\lambda f)$ .

3) لما $a\ge b$ فإنه من التعريف :

$$\int_{a}^{b}(\lambda f)(t)\,dt=-\int_{b}^{a}(\lambda f)(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_{a}^{b} f(t)\,dt=-\int_{b}^{a} f(t)\,dt$$

و حسب النتيجة السابقة $\int_{b}^{a}(\lambda f)(t)\,dt=\lambda\int_{b}^{a} f(t)\,dt$

إذن $\int_{a}^{b}(\lambda f)(t)\,dt=-\int_{b}^{a}(\lambda f)(t)\,dt=-\int_{b}^{a}\lambda f(t)\,dt=\lambda\int_{a}^{b} f(t)\,dt$

أي $I(\lambda f)=\lambda I(f)$

مثال ♦

$f$ و $g$ دالتان مستمرتان على المجال $[2\ ,\ 7]$ إذا علمت أن :

$$I=\int_{2}^{3} f(x)\,dx=-5 \quad \text{و} \quad J=\int_{7}^{3} f(x)\,dx=3 \quad \text{و} \quad K=\int_{2}^{7} g(x)\,dx=13$$

1) احسب $L=\int_2^7 f(x)\,dx$ و $M=\int_2^7 (f+g)(x)\,dx$ و

$$N=\int_2^7 \left(4f(x)-5g(x)\right)dx$$

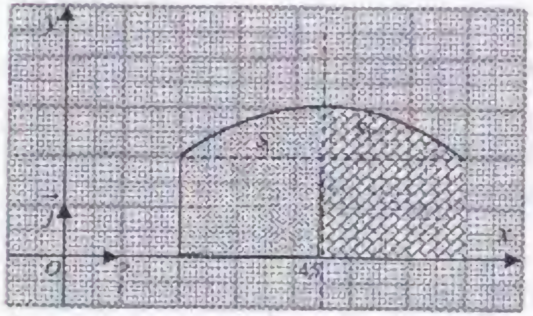
ب) نفرض أن $g(x) > 0$ على المجال $[2,7]$ و المنحني البياني لـ $g$ متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{9}{2}$. احسب $\int_2^{4,5} g(x)\,dx$.

✓ الحل

أ) $L=\int_2^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx-\int_7^3 f(x)dx=I-J=-8$

$$M=\int_2^7 (f+g)(x)dx=\int_2^7 f(x)dx+\int_2^7 g(x)dx=L+K=-8+13=5$$

$$N=\int_2^7 4f(x)dx-\int_2^7 5g(x)dx$$
$$=4\times L-5K=-32-65=-97$$




ب) $S_1=\int_2^{4,5} g(x)dx$

$S_2=\int_{4,5}^7 g(x)dx$

بما أن المنحني الممثل للدالة $g$ متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=4,5$

فإن $S_1=S_2$ و $S_1+S_2=13$ و منه $S_1=\frac{13}{2}$



## 2 - 4 إشارة التكامل و المقارنة

مبرهنة

$f$ و $g$ دالتان مستمرتان على مجال $I$، و ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقين من $I$.

1) إذا كان $a\le b$ و $f\ge 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt\ge 0$.

2) إذا كان $a\le b$ و $f\ge g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt \ge \int_a^b g(t)dt$.





الإثبات

1) رأينا في ما سبق أنه إذا كانت $f$ موجبة على $[a,b]$ فإن $I(f)$ يمثل المساحة و بالتالي فهو موجب إذن $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

2) من الفرض $f\ge g$ نستنتج أن $f-g\ge 0$ على المجال $[a,b]$
وعليه $I(f-g)\ge 0$ لكن $I(f-g)=I(f)-I(g)$.

إذن $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\ge 0$

ومنه نستنتج $\int_a^b f(x)dx\ge \int_a^b g(x)dx$.

**مثال** ◆

عين إشارة التكامل $I=\int_0^1 (x^2-1)dx$ و $J=\int_1^2 (x^2-1)dx$

✓ الحل

لتعيين إشارة $I$ نعين إشارة الدالة $f$ المعرفة على $[0,2]$ بـ $f(x)=x^2-1$

- إذا كان $x\in[0,1]$ فإن $f(x)\le 0$ إذن $\int_0^1 -f(x)dx\ge 0$ وحسب الخطية $\int_0^1 -f(x)dx=-\int_0^1 f(x)dx$ وعليه نستنتج $\int_0^1 f(x)dx\le 0$
- إذا كان $x\in[1,2]$ فإن $f(x)\ge 0$ ومنه $\int_1^2 f(x)dx\ge 0$.

## 2-5 القيمة المتوسطة لدالة - حصر القيمة المتوسطة

مبرهنة ❶

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$، و ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقين مختلفين من $I$، عندئذ يوجد عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $\int_a^b f(t)dt=(b-a)f(c)$.

العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة $f$ بين $a$ و $b$

الإثبات

نفرض أن الدالة $f$ متزايدة.

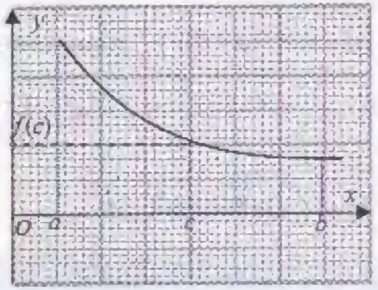
الحالة الأولى $a < b$

- بما أن $f$ متزايدة فإنه من أجل كل $x$ من $[a , b]$ فإن $f(b) \ge f(x) \ge f(a)$

ومنه نستنتج $f(b)(b-a) \ge \int_a^b f(x)dx \ge f(a)(b-a)$

وبما أن $b-a>0$ نجد $f(b) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ge f(a)$.

- بما أن $f$ متزايدة ومستمرة على $[a , b]$
فإنه يوجد عدد حقيقي $c$ من $[a , b]$
بحيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.




الحالة الثانية $a > b$

لدينا في هذه الحالة $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

و بما أن $b < a$ فإنه يوجد $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $\int_b^a f(x)dx = (a-b)f(c)$

ومنه $\int_a^b f(x)dx = -(a-b)f(c)$ أي $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

مبرهنة 2

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$، و ليكن $m$ و $M$ عددين حقيقيين مختلفين، و ليكن أيضا $a$ و $b$ عددين حقيقيين من $I$ بحيث $a \le b$.

إذا كانت $m \le f(x) \le M$ على المجال $[a , b]$ فإن $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$

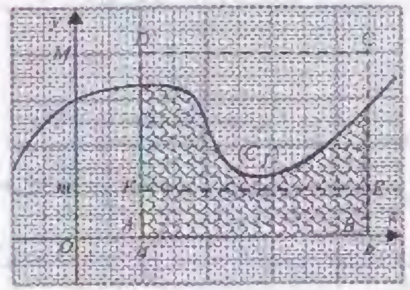
الإثبات

من أجل كل $x$ من $[a , b]$ لدينا،
$m \le f(x) \le M$ .... (1)

الدالتان $x \mapsto m$ و $x \mapsto M$ ثابتتان على $[a , b]$

إذن $\int_a^b M\,dt = M(b-a)$ و $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$

وبما أن $a \le b$ و بتكامل المتباينة (1) نحصل على








$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

بالقسمة على $(b-a)$ نجد $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

**نتيجة**

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ و ليكن $a$ و $b$ عددين كيفيين من $I$ وليكن $M$ عدد حقيقي موجب.

إذا كانت $|f(x)| \le M$ على $[a , b]$ أو $[b , a]$

فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$

مبرهنة

1) $f$ دالة مستمرة و سالبة على المجال $[a , b]$ عندئذ $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx$

2) إذا كانت $f$ تنعدم عند $c$ من $[a , b]$ و $f(x)$ سالبة على $[a , c]$ وموجبة على $[c , b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b f(x)dx$

الإثبات

1) نضع $f(x) = -g(x)$ حيث $g(x)$ موجبة

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx$$ .

(لأن $g(x) = -f(x) = |f(x)|$)

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = -\int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b f(x)dx$

### ملاحظة

1) إذا كانت $f$ سالبة على مجال $I$ فإن تكامل $f$ على $I$ هو نظير مساحة حيز من المستوي فوق المنحنى الممثل للدالة $f$

2) إذا غيرت $f$ إشارتها على $I$ نجزئ المجال $I$ إلى مجالات جزئية بحيث الدالة $f$ لها إشارة ثابتة على كل منها ثم نجمع التكاملات المحسوبة على كل مجال.

### تمرين تدريبي 1

بين أن 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \frac{\pi}{2}$ ، 2) $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx \le 2$

**الحل**

في الحالتين أن الدالتين المعطاة مستمرتان على $\mathbb{R}$ إذن فهما قابلتان للمكاملة على مجال التكامل.

1) من اجل كل $t$ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ يكون $0 \le \cos t \le 1$

إذا $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt$ لكن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = 1\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \frac{\pi}{2}$

2) بما أن $0 \le x \le 1$ فإن $0 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 2x \le 2$ و منه

$$0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx \le \int_0^1 2\,dx$$

لكن $\int_0^1 2\,dx = 2(1-0) = 2$ إذن $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx \le 2$.

### تمرين تدريبي 2

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-1$ و $(d)$ تمثيله البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) احسب التكامل $I=\int_0^2 f(x)\,dx$ ثم احسب القيمة المتوسطة لـ $f$ على $[0,2]$.

ب) ليكن $a$ عددا حقيقيا بحيث $a > 2$ و $M$ نقطة من $(d)$ ذات الفاصلة $a$.

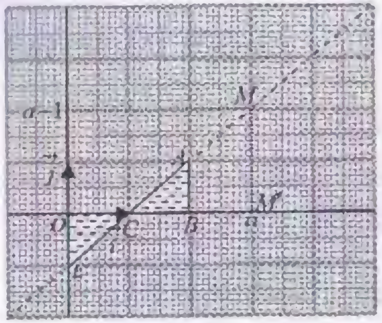
احسب $S(a)=\int_2^a f(x)\,dx$ ثم قارن بين $f(a)$ و $S'(a)$.

**الحل**

1) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$








بما أن $f$ سالبة على المجال $[0,1]$

فإن $\int_0^1 f(x)\,dx$

هو نظير مساحة المثلث $OEC$ التي تساوي $\frac{1}{2}$

ومنه $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

بما أن $f$ موجبة على $[1,2]$ فإن $\int_1^2 f(x)\,dx$

هي مساحة المثلث $ACB$ و التي تساوي 1

ومنه $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ إذن $I = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

القيمة المتوسطة للدالة $f$ على المجال $[0,2]$ هي $M$ حيث

$$M = \frac{1}{b-a}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ب) بما أن $f$ موجبة على $[2,a]$ فإن $\int_2^a f(x)\,dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف $AMBM'$

والتي تساوي $\frac{[(a-1)+1](a-2)}{2}$ أي $\frac{a(a-2)}{2}$

إذن $S(a) = \int_2^a f(x)\,dx = \frac{a(a-2)}{2}$

الدالة $S$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $S'(a) = a-1 = f(a)$.

## 3 - دوال أصلية لدالة

**مبرهنة**

$f$ دالة مستمرة على مجال $I=[a,b]$ يشمل $\alpha$

مهما يكن العدد الحقيقي $x$ من $I$، فإن الدالة $F$ المعرفة بـ $F: x \mapsto \int_\alpha^x f(t)\,dt$

قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $F'(x) = f(x)$.

**الإثبات**

نفرض أن $f$ متزايدة تماما و موجبة على مجال $[a,b]$ و ليكن $\alpha$ و $\alpha+h$ عددين حقيقيين من $[a,b]$.

لدينا $F(\alpha)=\int_a^{\alpha} f(t)\,dt$ و $F(\alpha+h)=\int_a^{\alpha+h} f(t)\,dt$ .

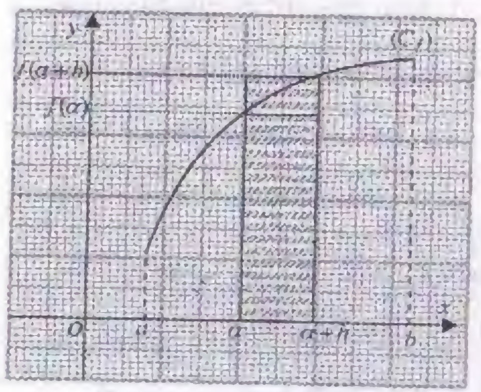
مساحة الحيز المشطب هي :

$F(\alpha+h)-F(\alpha)$ لما $h>0$ و $F(\alpha)-F(\alpha+h)$ لما $h<0$

لدينا $h\times f(\alpha) \le F(\alpha+h)-F(\alpha) \le h\times f(\alpha+h)$

ومنه نستنتج $f(\alpha) \le \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} \le f(\alpha+h)$ ( في حالة $h$ موجبة)

و $f(\alpha+h) \le \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} \le f(\alpha)$ ( في حالة $h$ سالب)




و بما أن $f$ مستمرة عند $\alpha$

فإن $\lim_{h\to 0} f(\alpha+h)=f(\alpha)$

و حسب نظرية الحصر

فإن $\lim_{h\to 0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=f(\alpha)$

لكن $\lim_{h\to 0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=F'(\alpha)$

و عليه $F'(\alpha)=f(\alpha)$ من اجل كل $\alpha$ من $[a\,,\,b]$.

بطريقة مماثلة نبين أن $F'(\alpha)=f(\alpha)$ في حالة $f$ متناقصة تماما على $I$ .

## 3 - 1 تعريف

كل دالة $F$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ وبحيث انه من أجل كل $x$ من $I$ يكون $F'(x)=f(x)$ . هي دالة أصلية لدالة $f$ على مجال $I$

مثال .

1) $f$ و $g$ دالتان معرفتان على $]0\,,+\infty[$ ب :
$f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=Ln\,x$
من اجل كل $x$ من $]0\,,+\infty[$ لدينا $g'(x)=f(x)$
ومنه $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على $]0\,,+\infty[$ .

2) $f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ ب $g(x)=\cos x$ و $f(x)=-\sin x$
من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f(x)$
ومنه $g$ أصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}$.





## 3 - 2 العلاقة بين دالتين أصليتين لدالة

مبرهنة

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ .
إذا كانت $F$ دالة أصلية لـ $f$ على $I$ فإن الدالة $f$ تقبل ما لا نهاية من الدوال الأصلية. من الشكل $G(x)=F(x)+k$ حيث $k$ عدد حقيقي.

الإثبات

لدينا فرضا $F$ قابلة للاشتقاق على $I$ و $F'(x)=f(x)$
- الدالة $G$ قابلة للاشتقاق على $I$ و بحيث $G'=F'=f$
إذن $G$ دالة أصلية لـ $f$ على $I$ .
وبالعكس إذا كانت $G$ دالة أصلية لـ $f$ على $I$ فإن $G'=f=F'$
وعليه $G'-F'=0$ ومنه $G-F$ ثابتة
اي $G(x)-F(x)=k$ ومنه $G(x)=F(x)+k$ .

مثال .

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{3}x^3$
الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=x^2=f(x)$
منه $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ و بالتالي كل الدوال $G$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $G(x)=\frac{1}{3}x^3+k$ حيث $k$ عدد حقيقي هي دوال أصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}$

## 3 - 3 الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معينة من أجل قيمة معلومة للمتغير

مبرهنة

$x_0$ عدد حقيقي من مجال $I$ و $y_0$ عدد حقيقي كيفي
عندئذ توجد دالة أصلية وحيدة $G$ لـ $f$ على $I$ بحيث $G(x_0)=y_0$ .

الإثبات

إذا كانت $F$ دالة أصلية لـ $f$ على $I$ فإن كل دالة أصلية أخرى $G$ لـ $f$ تكتب على الشكل $G(x)=F(x)+k$ مع $k$ عدد حقيقي و لكون $G(x_0)=y_0$ نجد $F(x_0)+k=y_0$
ومنه $k=y_0-F(x_0)$
إذن $k$ وحيد و بالتالي توجد دالة أصلية و حيدة تحقق الشرط $G(x_0)=y_0$ .

مثال .

$f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{3}x^3$

الدوال الأصلية للدالة $f$ هي من الشكل $G(x)=\frac{1}{3}x^3+k$ مع $k$ عدد حقيقي

و الآن نبحث عن الدالة الأصلية التي تحقق $G(1)=2$ .

$G(1)=2$ تكافئ $\frac{1}{3}\times 1^3+k=2$ تكافئ $k=\frac{5}{3}$

إذن الدالة الأصلية للدالة $f$ التي تحقق $G(1)=2$ هي $G(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}$

## 3 - 4 الدالة الأصلية لدالة مستمرة

**مبرهنة**

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ و $a$ عدد حقيقي من $I$

عندئذ فالدالة $F:\ x\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ المعرفة على $I$ هي الدالة الأصلية الوحيدة لـ $f$ على $I$ بحيث $F(a)=0$

### تمرين تدريبي 1

$F$ دالة معرفة بـ $F(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة $F$ .

ب) احسب $F'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة $F$ ثم عين إشارتها.

✓ الحل

أ) الدالة $t\mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن الدالة $F$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي $D_F=\mathbb{R}$ .

ب) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $F'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

و بما أن $e^{-\frac{x^2}{2}}>0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$

فإن $F'(x)>0$

وبالتالي $F$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

و $F(0)=\int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=0$

وعليه إذا كان $x>0$ فإن $F(x)>0$

و إذا كان $x<0$ فإن $F(x)<0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | + | | + |
| $F(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ |





### تمرين تدريبي 2

لتكن $t$ دالة معرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $t(x)=\tan x$

أ) عين المشتقة $t'$ للدالة $t$ .

ب) إستنتج الدالة الأصلية للدالة $h:\ x\mapsto \tan^2 x$ و التي تنعدم من اجل $x=\frac{\pi}{4}$

✓ الحل

أ) الدالة $t$ قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و لدينا $t'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

ب) لدينا $\tan^2 x=t'(x)-1$ ومنه الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \tan^2 x$ هي الدوال $G(x)=t(x)-x+k$ حيث $k$ عدد حقيقي.

$G\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ يكافئ $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}+k=0$ يكافئ $k=\frac{\pi}{4}-1$

إذن الدالة الأصلية المطلوبة هي $G(x)=\tan(x)-x+\frac{\pi}{4}-1$ .

## 4 - حساب الدوال الأصلية

### 1 - 4 دوال أصلية لدوال شهيرة

- إذا كانت $F$ و $G$ دالتين اصليتين لدالتين $f$ و $g$ على التوالي على مجال $I$
فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على $I$ .
- إذا كانت $F$ دالة أصلية لدالة $f$ على $I$ و $\lambda$ عدد حقيقي
فإن $\lambda F$ أصلية لـ $\lambda f$ على $I$
- نفس النتائج المعروفة حول مشتقات الدوال الشهيرة وبقراءة مقلوبة تعطي لنا الدوال الأصلية كما في الجدول التالي:

| الدالة $f$ | الأصلية $F$ | على المجال $I=...$ |
|---|---|---|
| $a$ ثابت | $ax$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n\ (n\in\mathbb{N})$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ ($n$ صحيح سالب و يختلف عن -1) | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}-\{0\}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $]0,+\infty[$ |

| | | |
|---|---|---|
| $]0,+\infty[$ | $Ln\,x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $\mathbb{R}$ | $-\cos x$ | $\sin x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k\in\mathbb{Z}$ | $\tan\ x$ | $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ |

## 4 - 2 دساتير عامة

معرفة مشتق بعض الدوال المركبة يسمح لنا بتعيين دوال أصلية لدوال أخرى و الجدول التالي يلخص هذه الحالات مع $U$ دالة قابلة للاشتقاق على $I$ .

| ملاحظة | الأصلية $F$ | الدالة $f$ |
|---|---|---|
| لما $n\langle -1$ من أجل كل $x$ من $I$ $U(x)\neq 0$ | $\frac{1}{n+1}U^{n+1}$ | $U'U^n\ (n\in\mathbb{Z}-\{-1\})$ |
| $U\rangle 0$ على $I$ | $2\sqrt{U}$ | $\frac{U'}{\sqrt{U}}$ |
| $U\neq 0$ | $Ln\lvert U\rvert$ | $\frac{U'}{U}$ |
| | $e^U$ | $U'e^U$ |
| $g$ دالة أصلية للدالة $U$ على $I$ | $x\mapsto\frac{1}{a}\,g(ax+b)$ | $x\mapsto U(ax+b)$ |

### تمرين تدريبي

عين الدالة الأصلية $F$ على $I$ من أجل كل دالة $f$ مستمرة على المجال المعطى

أ) $f(x)=(2x-1)^3\ ,\ I=\mathbb{R}$ ؛ ب) $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^3}\ ,\ I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

جـ) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}\ ,\ I=\mathbb{R}$ ؛ د) $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{3x^2+3}}\ ,\ I=\mathbb{R}$

### الحل

نكتب $f$ على شكل $\alpha g$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي و $g$ دالة نعرف دالتها الأصلية باستعمال الدساتير العامة و الأشكال التي نبحث عنها هي من الشكل :

$$f=\alpha U'U^n\ ;\ f=\alpha\frac{U'}{U}\ ;\ f=\alpha\frac{U'}{\sqrt{U}}\ ;\ f=\alpha U'e^U$$





أ) نضع $U(x)=2x-1$ و بالتالي $f(x)=(U(x))^3$

الدالة $U$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=2$

إذن $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\times(U(x))^3=\frac{1}{2}\times U'(x)\times(U(x))^3$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ هي $F$ حيث $F=\frac{1}{2}\times\frac{U^4}{4}=\frac{U^4}{8}$

و من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4$

ب) نضع $U(x)=2x-1$ وبالتالي $f(x)=\frac{1}{U^3(x)}$

الدالة $U$ قابلة للاشتقاق على $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ و لدينا $U'(x)=2$

وبالتالي $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{(U(x))^3}=\frac{1}{2}\times\frac{U'(x)}{(U(x))^3}=\frac{1}{2}\,U'(x)\times(U(x))^{-3}$

إذن فالدالة الأصلية على $I$ هي $F=\frac{1}{2}\times\frac{U^{-2}}{-2}=\frac{-1}{4}\,U^{-2}$

ومن أجل كل $x$ من $I$ يكون $F(x)=\frac{-1}{4(2x-1)^2}$

جـ) نضع $U(x)=x^2+1$

الدالة $U$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=2x$

وبالتالي $f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{2}\frac{U'(x)}{U(x)}$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ لـ $f$ هي $F$ حيث $F(x)=\frac{3}{2}Ln\lvert U(x)\rvert$

وبما أن $U(x)\rangle 0$ فإن $F(x)=\frac{3}{2}\,Ln\,U(x)$

إذن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{3}{2}Ln(x^2+1)$

د) نضع $U(x)=3x^2+3$

الدالة $U$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=6x$

وبالتالي $f(x)=\frac{5}{6}\times\frac{6x}{\sqrt{3x^2+3}}=\frac{5}{6}\times\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ لـ $f$ هي $F=\frac{5}{3}\sqrt{U}$

ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{5}{3}\sqrt{3x^2+3}$ .

## ⑤ - حساب التكامل

### 5 - 1 حساب التكامل باستعمال الدالة الأصلية



**مبرهنة**

إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ و $F$ دالة أصلية كيفية للدالة $f$ على $I$

و إذا كان $a$ و $b$ عددين حقيقيين من $I$ فإن $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

**الإثبات**

الدالة $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ هي دالة اصلية لـ $f$ على $I$ بحيث $G(a)=0$

إذا كانت $F$ دالة اصلية كيفية لـ $f$ على $I$ فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت $k$ بحيث من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $G(x)=F(x)+k$

و بما ان $G(a)=0$ فإن $k=-F(a)$

إذن من اجل كل $x$ من $I$ يكون $G(x)=F(x)-F(a)$

و باختيار $x=b$ نحصل على $G(b)=F(b)-F(a)$

اي $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

**ملاحظة**

تكتب الفرق $F(b)-F(a)$ على الشكل $[F(x)]_a^b$

و كذلك $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

**مثال -**

1) على $\mathbb{R}$ الدالة $x \mapsto \sin x$ لها دالة أصلية هي $x \mapsto -\cos x$ و منه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = 1 .$$

2) على $\mathbb{R}$ الدالة $x \mapsto x^2+x+1$ لها دالة أصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ و منه

$$\int_0^1 (t^2+t+1)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right) - (0) = \frac{11}{6}$$





### 5 - 2 التكامل بالتجزئة

**مبرهنة**

$U$ و $V$ دالتان قابلتان للاشتقاق على $I$ بحيث مشتقتاهما $U'$ و $V'$ مستمرتان على $I$
عندئذ من اجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ من $I$ يكون :

$$\int_a^b U(t)\,V'(t)dt = [U(t)\,V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)\,V(t)dt$$

**الإثبات**

الدالة $U \times V$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا $(U\times V)' = U' \times V + U \times V'$

ومنه $UV' = (UV)' - U'V$

بما أن الدوال $UV'$ ، $(UV)'$ و $U'V$ مستمرة على $I$ فإن :

$\int_a^b (UV')(t)\,dt = \int_a^b \left[(UV)'(t) - (U'V)(t)\right] dt$ و حسب خطية التكامل نجد

$$\int_a^b (UV')(t)\,dt = \int_a^b (UV)'(t)\,dt - \int_a^b (U'V)(t)dt \quad .......... (1)$$

لكن $UV$ هي الدالة الأصلية لـ $(U \times V)'$ على $I$

إذن $\int_a^b (UV)'(t)dt = [U(t)V(t)]_a^b$

ومنه المساواة (1) تكتب على الشكل :

$$\int_a^b (U)(t)\,V'(t)\,dt = [U(t)\,V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)\,V(t)dt \quad ........ (2)$$

تسمى المساواة (2) دستور التكامل بالتجزئة.

**مثال -**

احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t\, dt$

**✓ الحل**

التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$ من الشكل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} U(t)V'(t)dt$ مع $U(t)=t$ و $V'(t)=\sin t$

ومنه نجد $U'(t)=1$ و $V(t)=-\cos t$.

الدالتان $U$ و $V$ قابلتان للاشتقاق على $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ و مشتقتاهما $U'$ و $V'$ مستمرتان على $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ وحسب دستور المكاملة بالتجزئة نجد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = [-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t\,dt = [-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) - (0\cos 0)\right] - \left[\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) - (-\sin 0)\right] = 1$$

**تمرين تدريبي 1**

أ) احسب قيمة التكامل $I=\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

ب) احسب قيمة التكامل $J=\int_0^1 x e^x\,dx$

**✓ الحل**

الدساتير العامة لا تسمح لنا بتعيين الدالة الأصلية للدالتين $x\mapsto x\cos x$ و $x\mapsto x e^x$ .

أ) نضع $U(x)=x$ و $V'(x)=\cos x$ ومنه نجد $U'(x)=1$ و $V(x)=\sin x$ .

الدالتان $U$ و $V$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $U'$ و $V'$ مستمرتان على $\mathbb{R}$

وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد $I=[x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$$=[x\sin x]_0^{\pi}-[-\cos x]_0^{\pi} = (0)-(0)-[1-(-1)] = -2$$

ب) نضع $U(x)=x$ و $V'(x)=e^x$ ومنه نجد $U'(x)=1$ و $V(x)=e^x$

الدالتان $U$ و $V$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $U'$ و $V'$ مستمرتان على $\mathbb{R}$

إذن حسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$J=[x e^x]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x\,dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e-(e-1)=1$$

**تمرين تدريبي 2**

أوجد دالة أصلية على المجال $]0\,,+\infty[$ للدالة $f: x\mapsto Ln\,x$





**✓ الحل**

بما أن الدالة $f$ مستمرة على $]0\,,+\infty[$ فإنها تقبل دالة أصلية من الشكل:

$F: x\mapsto \int_1^x Ln\,t\,dt$ و $F(1)=0$ ونكتب $F(x)=\int_1^x 1\times Ln\,t\,dt$

بوضع $U'(t)=1$ و $V(t)=Ln(t)$ نجد $U(t)=t$ و $V'(t)=\frac{1}{t}$

الدالتان $U$ و $V$ قابلتان للاشتقاق على $]0\,,+\infty[$ و دالتاهما المشتقتان $U'$ و $V'$ مستمرتان على $]0\,,+\infty[$ وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد:

$$F(x)=\int_1^x 1\times Ln\,t\,dt = [t\,Ln\,t]_1^x - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,dt$$

$$=[t\,Ln\,t]_1^x - \int_1^x 1\,dt = [t\,Ln\,t]_1^x - [t]_1^x = x\,Ln(x)-x+1$$

إذن الدالة $x\xrightarrow{F} x\,Ln(x)-x+1$ أصلية للدالة $x\mapsto Ln\,x$ على المجال $]0\,,+\infty[$ بحيث $F(1)=0$

لاحظ أنه إذا أضفنا $-1$ إلى الدالة $F$ نحصل على دالة أصلية أخرى لـ $x\mapsto Ln\,x$ هي : $x\mapsto x\,Ln(x)-x$

## 6 - تطبيقات الحساب التكاملي

### 1 - 6 حساب مساحة حيز من مستو

تعريف التكامل لدالة مستمرة يسمح لنا بحساب مساحة حيز من مستو محدود بمنحني هذه الدالة.

**خواص**

1) إذا كانت الدالة $f$ مستمرة و موجبة على $[a\,,\,b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b\ge x\ge a$ و $f(x)\ge y\ge 0$ هي $\int_a^b f(x)dx$

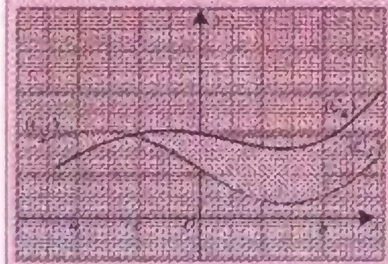
2) إذا كانت $f$ دالة مستمرة و سالبة على $[a\,,\,b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b\ge x\ge a$ و $0\ge y\ge f(x)$ هي $-\int_a^b f(x)dx$

3) إذا كان لدينا $f(x)\le g(x)$ على $[a\,,\,b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b\ge x\ge a$ و $g(x)\ge y\ge f(x)$ هو $\int_a^b [\,g(x)-f(x)\,]\,dx$

## ملاحظة

1) لحساب المساحة المحصورة بين منحنيين لدالتين $g$ و $f$ على $[a\ ,b]$ نتبع ما يلي :
- نجزئ هذا المجال إلى مجالات جزئية بحيث فرق الدالتين يحافظ على إشارة ثابتة.
- نكامل دالة الفرق و نراعي العلاقة الموجودة بين التكامل و المساحة.

$$A = -\int_a^c \left(g(x)-f(x)\right)dx + \int_c^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$



2) في معلم متعامد و متجانس وحدة المساحة هي مساحة المربع الذي طوله ضلعه $\|\vec{i}\|$ أما في معلم متعامد وحدة المساحة هي مساحة المستطيل الذي أبعاده $\|\vec{i}\|$ و $\|\vec{j}\|$

**مثال -**

$f$ دالة معرفة على المجال $[-1\ ,4]$ بحيث $f(x) = \frac{1}{2}(x^3-3x^2)$

و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) ارسم $(\gamma)$ على المجال $[-1\ ,4]$.

2) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ $(\gamma)$ و محور الفواصل $(x x')$ و المستقيمين اللذين معادلاتاهما $x=2$ و $x=4$ .

**الحل**

1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $[-1\ ,4]$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-6x\right)$

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $x=2$

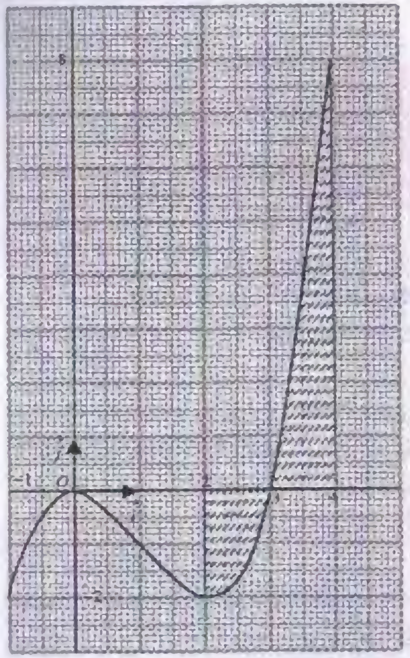
- إذا كان $x\in[-1\ ,0\ [\cup]\ 2\ ,4]$ فإن $f$ متزايدة تماما.
- إذا كان $x\in]\ 0\ ,2\ [$ فإن $f$ متناقصة تماما.

و منه جدول تغيرات $f$ على $[-1\ ,4]$ هو

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| تغيرات $f$ | $-2$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $8$ |







2) على المجال $[2\ ,3]$ يكون $f(x)\leq 0$

و على المجال $[3\ ,4]$ يكون $f(x)\geq 0$

و منه المساحة المطلوبة

هي $\mathcal{A} = \left(-\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx\right)$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto f(x)$ هي ،

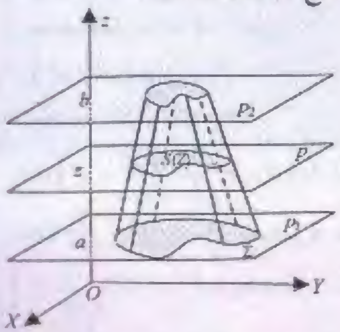
$x\mapsto \frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3$ و منه

$$\mathcal{A} = -\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_2^3 + \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_3^4$$

$$= \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$

## 6 - 2 حساب الحجوم :

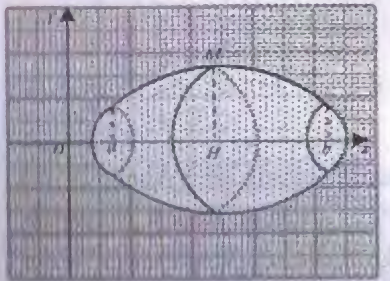
نعتبر مجسما $\Sigma$ محدودا بالمستويين المتوازيين $(p_1)$ و $(p_2)$ ذوي المعادلتين $Z=a$ و $Z=b$ على التوالي في معلم متعامد و متجانس و ليكن $V$ حجم هذا المجسم و $S(Z)$ مساحة مقطع منه بالمستوي $(p)$ الموازي لـ $(p_1)$ و $(p_2)$ معادلته $Z=\alpha$ مع $b\geq\alpha\geq a$ .



حجم هذا المجسم يعطى بالعلاقة $V=\int_a^b S(z)\,dz$

وحدة الحجوم هي حجم متوازي المستطيلات القائم الذي أحرفه $\|\vec{i}\|$ ، $\|\vec{j}\|$ ، $\|\vec{k}\|$.

**مجسم دوراني محوره $(x x')$**



ليكن $(\gamma)$ قوس من منحنى الممثل للدالة $f$ حيث $y=f(x)$ مع $f(x)\geq 0$ على $[a\ ,b]$.

بتدوير $(\gamma)$ حول $(x x')$ فإن القوس $(\gamma)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x x')$ و هذه المساحة تحدد مجسما دورانيا.

و مقطع هذا المجسم بمستوي عمودي على $(x x')$ يعطي قرصا مساحته $\pi HM^2$

أي $\pi\left(f(x)\right)^2$ حيث $M\left(x, f(x)\right)$ نقطة من $(\gamma)$

و حجم هذا المجسم يعطى بالعلاقة $V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

**ملاحظة**

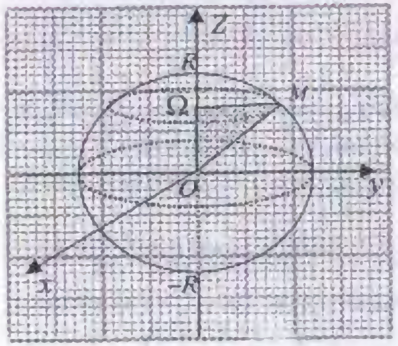
من اجل مجسم دوراني محوره $(xx')$ فإن العلاقة $V=\int_a^b a f^2(x)dx$ تستنتج و هذا بتصورنا المحور $(xx')$ في مكان $(zz')$

**مثال .**

أوجد الدستور الذي يعطي حجم كرة نصف قطرها $R$ .

**الحل**

في معلم متعامد و متجانس للفضاء نعتبر الكرة التي مركزها $o$ و طول نصف قطرها $R$ .
إذا أخذنا مقطع كرة بمستوي ذي المعادلة $Z=a$
مع $R \rangle a \rangle -R$ نحصل على دائرة مركزها
$\Omega$ ينتمي إلى $(zz')$ نصف قطرها $\Omega M$ .
و في المثلث القائم $O\Omega M$
لدينا $O\Omega^2+\Omega M^2=OM^2$
ومنه $\Omega M^2=OM^2-O\Omega^2=R^2-a^2$ .
مساحة القرص الذي مركزه $\Omega$
و نصف قطره $\Omega M$ هي:




$$S(a)=\pi\left(R^2-a^2\right)$$

و منه الحجم المطلوب هو :

$$V=\int_{-R}^{R}S(z)\,dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$$

الدالة $z\mapsto\pi\left(R^2-z^2\right)$ مستمرة على $[-R\ ,\ R]$ و دالتها الأصلية هي:

$$z\mapsto\pi\left(R^2z-\frac{1}{3}z^3\right)$$

و منه

$$V=\left[\pi\left(R^2z-\frac{1}{3}z^3\right)\right]_{-R}^{R}=\pi\left(+R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)$$

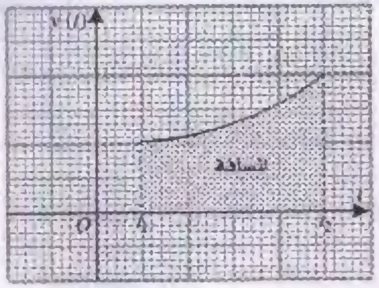
$$=\pi\left[+\frac{2}{3}R^2+\frac{2}{3}R^3\right]=\frac{4}{3}\pi R^3$$

## 6 - 3 العبارة التكاملية للمسافة المقطوعة و السرعة المتوسطة

- إذا علمنا ان السرعة اللحظية $V(t)$ لمتحرك بدلالة الزمن $t$ فإن المسافة المقطوعة $d(t_1,t_2)$ لهذا المتحرك بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ هي :








$$d(t_1\ ,\ t_2)=\int_{t_1}^{t_2}V(t)\,dt$$

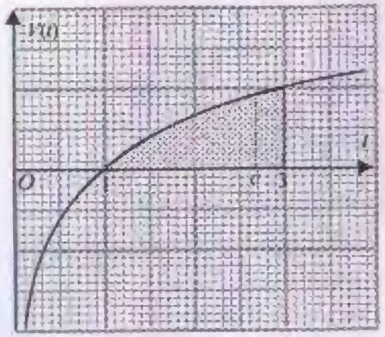
- السرعة المتوسطة $V_M$ بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ هي :

$$V_M=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}V(t)\,dt$$

**مثال .**

من اجل كل $0 \langle t$ ، السرعة اللحظية لمتحرك هي $V(t)=Ln\,t$
احسب المسافة المقطوعة من طرف المتحرك بين اللحظتين $t_1=1$ و $t_2=3$ ثم احسب السرعة المتوسطة له.

**الحل**




$$d(t_1\ ,\ t_2)=\int_1^3V(t)\,dt=\left[t\,Ln(t)-t\right]_1^3$$

$$=\left(3\,Ln(3)-3\right)-(0-1)$$

$$d=3\,Ln(3)-2\approx1,3\,m$$

$$V_m=\frac{1}{3-1}\int_1^3V\,Ln(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times1,3\approx0,65\,m/s$$

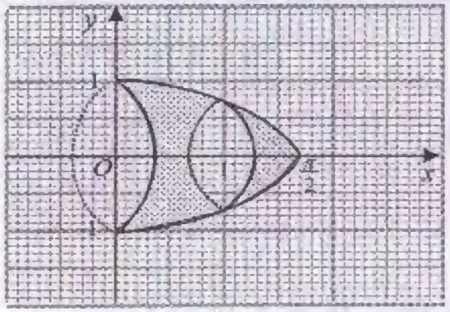
**تمرين تدريبي . 1**

$(\gamma)$ المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto\cos x$ المعرفة على المجال $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ .
أ) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ $(\gamma)$ و محور الفواصل .
ب) احسب الحجم المولد بدوران المنحني $(\gamma)$ حول المحور $(xx')$

**الحل**

أ) الدالة cos موجبة على المجال $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$

و المساحة المطلوبة هي $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$




$$S = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

ب) الدالة $\cos$ موجبة على $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$

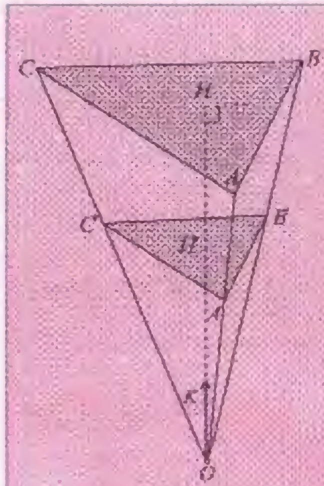
و الحجم المطلوب يساوي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x\, d\,x$

لدينا $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^2 x$ هي الدالة $F$ حيث:

$F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$ إذن $V = \pi\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right) = \pi \times \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi^2}{4}$

## تمرين تدريبي . ❷




لنعتبر هرم $OABC$ (مثلث الأوجه) كما هو موضح في الشكل ، ارتفاعه $[OH]$ حيث $OH = h$ و $S$ مساحة القاعدة $ABC$ .

لتكن $H'$ نقطة من المحور $\left(o\ .\ \vec{k}\right)$ تقع داخل الهرم. و مقطع الهرم بالمستوي الموازي للمستوي $(ABC)$ و المارمن $H'$ هو مثلث $A'B'C'$ . نضع $OH' = Z$

1) استعمل التحاكي الذي مركزه $O$ لإثبات أن المساحة $S(z)$ للمقطع $A'B'C'$ هي : $S(z) = S \times \frac{z^2}{h^2}$

2) احسب حجم الهرم بدلالة $S$ و $h$

✓ الحل

1) $\frac{OH'}{OH} = \frac{z}{h} = k$ منه $OH' = k\,OH$ و بما ان $\overrightarrow{OH}$ و $\overrightarrow{OH'}$ لهما نفس الإتجاه

فإن $\overrightarrow{OH'} = k\,\overrightarrow{OH}$ و هذا يعني $H'$ صورة $H$ بالتحاكي الذي مركزه النقطة $O$

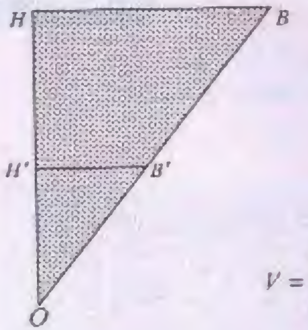
و نسبته $k = \frac{z}{h}$

$(HB) \perp (OH)$ و $(OH') \perp (H'B')$ و $(HB) \perp (H'B')$





حسب نظرية طاليس $\frac{OH'}{OH} = \frac{OB'}{OB} = k$ و هذا يعني أن $B'$ صورة $B$ بالتحاكي الذي مركزه $O$ و نسبته $k$




بنفس الطريقة نبين أن $A'$ صورة $A$ و $C'$ صورة $C$

إذن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث $ABC$ بالتحاكي

الذي مركزه النقطة $O$ و نسبة $k = \frac{z}{h}$

إذا كانت $S$ مساحة $ABC$ و $S(z)$ مساحة $A'B'C'$

فإن $S(z) = k^2\,S$ و منه $S(z) = \frac{z^2}{h^2}\,S$

2) $V = \int_0^h S(z)\,d\,z = \int_0^h S\,\frac{z^2}{h^2}\,d\,z = S\int_0^h \frac{z^2}{h^2}\,d\,z = \frac{S\,h}{3}$

# تطبيقات نموذجية

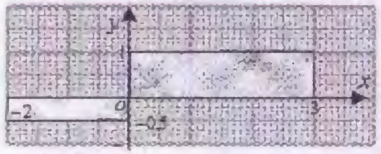
## تطبيق 1 حساب تكامل دالة درجية

1) مثل الدالة الدرجية $f$ ثم احسب التكامل $I(f)$ على $[-2 , 3]$

حيث $\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2} , & 0 > x \geq -2 \\ f(x) = +1 , & 3 \geq x \geq 0 \end{cases}$

2) مثل الدالة $f$ المعرفة على $[0 , 3]$ ب $f(x) = E(x) - x$ حيث $E$ دالة الجزء الصحيح ثم احسب التكامل $I(f)$ على المجال $[0 , 3]$

### ✓ الحل



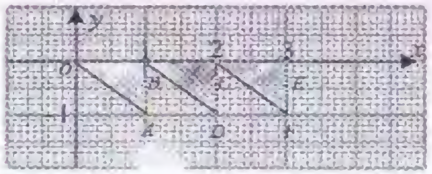
الدالة $f$ سالبة على المجال $[-2 , 0]$ و منه $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي أبعاده 2 و $\frac{1}{2}$

أي $I(f) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$

الدالة $f$ موجبة على المجال $[0 , 3]$

و منه $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي أبعاده 3 و 1 أي $I(f) = 1 \times 3 = 3$

تكامل الدالة $f$ على المجال $[-2 , 3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي $3-1=+2$



2) $\begin{cases} f(x) = -x , & x \in [0 , 1[ \\ f(x) = 1-x , & x \in [1 , 2[ \\ f(x) = 2-x , & x \in [2 , 3[ \end{cases}$

- الدالة $f$ سالبة على المجال $]0,1[$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي 1- على $]0,1[$
- الدالة $f$ سالبة على المجال $]1 , 2[$ و بالتالي $I(f)$ يساوي 1-.
- الدالة $f$ سالبة على المجال $]2 , 3[$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي 1-

و عليه فالتكامل $f$ على $[0,3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي $-1-1-1=-3$

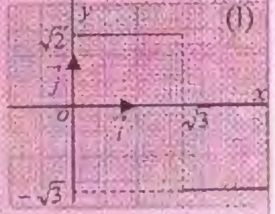


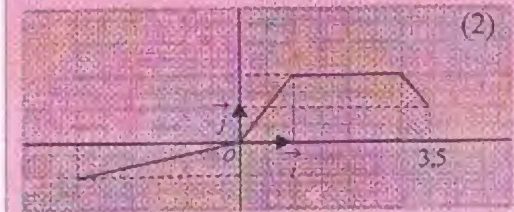


## تطبيق 2 حساب تكامل دالة درجية و تكامل دالة تآلفية بالقطع

1) الشكل (1) يمثل التمثيل البياني لدالة درجية.
عين عبارة $f(x)$ ثم احسب التكامل $f$ على مجال تعريفها.

2) الشكل (2) يمثل المنحني البياني لدالة تآلفية بالقطع، احسب التكامل $I(f)$ باستعمال المساحة




### ✓ الحل

1) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{2} , & \sqrt{3} > x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{3} , & 3 \geq x \geq \sqrt{3} \end{cases}$

$f$ موجبة على المجال $[0, \sqrt{3}]$ و بالتالي $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي أبعاده $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ منه $I(f)=\sqrt{6}$

$f$ سالبة على المجال $[\sqrt{3} , 3]$ و بالتالي $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي أبعاده $(3-\sqrt{3})$ و $\sqrt{3}$ و بالتالي $I(f)=-\sqrt{3}(3-\sqrt{3})$

إذن تكامل $f$ على $[0 , 3]$ يساوي المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي $I(f)=[\sqrt{6}-\sqrt{3}(3-\sqrt{3})]$

2) - الدالة $f$ سالبة على المجال $[-3 , 0]$ و بالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث التي تساوي $\frac{3}{2}$ منه $I(f)=-\frac{3}{2}$

- الدالة $f$ موجبة على المجال $[0 , 3]$ و بالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة شبه المنحرف الذي طول قاعدته الكبرى 3 و الصغرى 2 و ارتفاعه 2 و تساوي $\frac{(3+2) \times 2}{2} = 5$

إذن $I(f)=5$

- الدالة $f$ موجبة على المجال $[3 , 3{,}5]$ و بالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة مثلث الذي قاعدته 0,5 و ارتفاعه 1 و تساوي $\frac{1 \times 0{,}5}{2} = \frac{1}{4}$ ومنه $I(f)=\frac{1}{4}$

إذن التكامل $I\ (f)$ على المجال $[-3\ ,\ 3,5]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليه سابقا و تساوي $\frac{15}{4} = \frac{-3}{2} + 5 + \frac{1}{4}$

## تطبيق 3 حساب تكامل دالة تألفية بالقطع

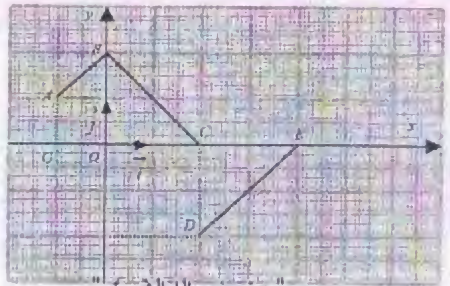
$f$ و $g$ دالتان تألفيتان بالقطع معرفتان على المجال $[-1\ ,\ 4]$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=x+2 & ,\ x\in[-1\ ,\ 0] \\ f(x)=-x+2 & ,\ x\in]0\ ,\ 2] \\ f(x)=x-4 & ,\ x\in]2\ ,\ 4] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} g(x)=-\frac{1}{2}x+1 & ,\ x\in[-1\ ,\ 1[ \\ g(x)=-\frac{1}{4}x+1 & ,\ x\in[1\ ,\ 4] \end{cases}$$

احسب تكاملي $f$ و $g$ على $[-1\ ,\ 4]$

### ✓ الحل

"منحنى الدالة $g$"



"منحنى الدالة $f$"

- الدالة $f$ موجبة على $[-1\ ,\ 0]$ و بالتالي فإن $I\ (f)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAG$ التي تساوي $1,5$ و منه $I\ (f)=1,5$

الدالة $f$ موجبة على المجال $]0\ ,\ 2]$ و بالتالي فإن $I\ (f)$ يساوي مساحة المثلث $OBC$ التي تساوي $2$ و منه $I\ (f)=2$

الدالة $f$ سالبة على المجال $]2\ ,\ 4]$ و بالتالي فإن $I\ (f)$ هو نظير مساحة المثلث $CDE$ التي تساوي $2$ و منه $I\ (f)=-2$

إذن تكامل $f$ على $[-1\ ,\ 4]$ هو المجموع الجبري للتكاملات و عليه $\frac{3}{2} = 2$ ... $I\ (f)=\frac{3}{2}$

- الدالة $g$ موجبة على $[-1\ ,\ 1[$ و بالتالي فإن $I\ (g)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $ABCF$ و التي تساوي $2,25$ و منه $I\ (g)=2,25$

الدالة $g$ موجبة على المجال $[1\ ,\ 4]$ و بالتالي $I\ (g)$ هي مساحة المثلث $DFE$ و التي تساوي $\frac{9}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$ ومنه $I\ (g)=\frac{9}{8}$ إذن تكامل $g$ على $[-1, 4]$ هو $\frac{27}{8} = \frac{9}{8} + 2,25$





## تطبيق 4 حساب تكامل دالة تآلفية

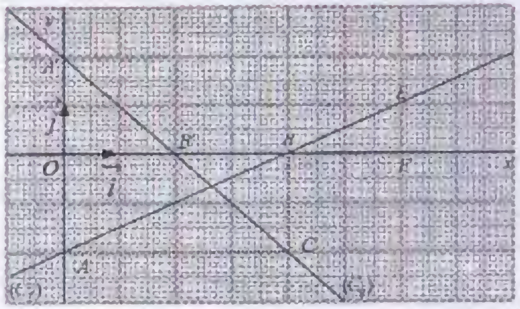
الدالتان $f$ و $g$ معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}x-2$ و $g(x)=2-x$

1) ارسم $(C_f)$ و $(C_g)$ في معلم متعامد و متجانس

2) باستعمال حساب المساحات احسب التكاملات التالية $\int_0^2 g(x)dx$ .

$\int_2^4 g(x)dx$ ، $\int_0^4 f(x)dx$ ، $\int_4^6 f(x)dx$

### ✓ الحل



1) المنحني الممثل للدالة $f$ عبارة عن مستقيم يمر من النقط : $A(0,-2)$ ، $B(4,0)$ و $E(6,1)$ .

المنحني الممثل للدالة $g$ عبارة عن مستقيم يمر من النقط : $A'(0,2)$ ، $B'(2,0)$ و $C(4,-2)$

2) الدالة $f$ موجبة ومستمرة على $[4,6]$ و بالتالي فإن تكامل $f$ على $[4,6]$ تساوي مساحة المثلث $BE'E$ ومنه $\int_4^6 f(x)dx=1$

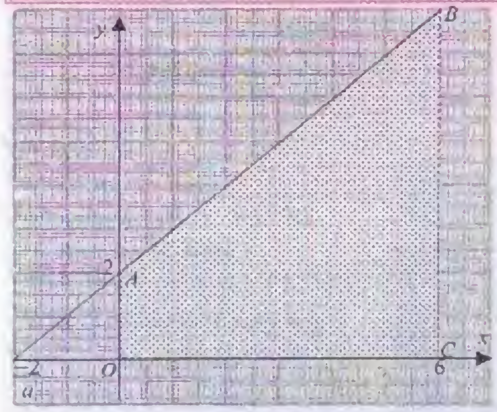
- الدالة $f$ سالبة ومستمرة على المجال $[0,4]$ وبالتالي فإن تكامل $f$ على $[0,4]$ هو نظير مساحة المثلث $OBA$ التي تساوي $4$ إذن $\int_0^4 f(x)dx=-4$

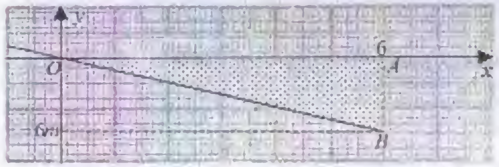
- الدالة $g$ معرفة و موجبة على $[0\ ,\ 2]$ و بالتالي فإن تكامل $g$ على $[0\ ,\ 2]$ تساوي مساحة المثلث $OB'A'$ التي تساوي $2$ إذن $\int_0^2 g(x)dx=2$

- الدالة $g$ سالبة على المجال $[2\ ,4]$ و بالتالي فإن تكامل $f$ على $[2\ ,4]$ هو نظير مساحة المثلث $B'BC$ التي تساوي $2$ إذن $\int_2^4 g\ (x)\ dx=-2$

## تطبيق 5 — تعيين دالة علم تكاملها

1) أوجد دالة تآلفية $p$ بحيث $p : x \mapsto a x+2$ مع $a \rangle 0$ التي تكاملها على المجال $[0\,,6]$ هي 16
2) أوجد الدالة التآلفية $q$ بحيث $q : x \mapsto m x$ التي تكاملها على المجال $[0\,,6]$ يساوي $-8$ مع $m \langle 0$




### ✓ الحل

1) بما أن $p$ موجبة على $[0\,,6]$
فإن تكامل $p$ على $[0\,,6]$
يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAC$
و التي تساوي :
$$\frac{(2+6a+2)\times 6}{2} = 18a+12$$
و بالتالي $18a+12=16$ منه نستنتج ،
$a=\frac{2}{9}$ إذن $p(x)=\frac{2}{9}x+2$

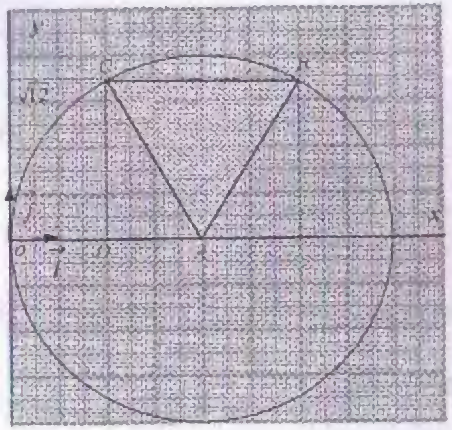
2) بما أن $q$ سالبة على المجال $[0\,,6]$
فإن تكامل $q$ على $[0\,,6]$ هو نظير
مساحة المثلث $OAB$ التي تساوي $18|m|$
و بالتالي $18|m|=-(-8)$
أي $18|m|=8$ و منه $m=\frac{-4}{9}$.

## تطبيق 6 — حساب التكامل بالاعتماد على مساحة قرص

1) بين أن الدائرة $(C)$ التي مركزها النقطة $A(4\,,0)$ و المارة من مبدأ المعلم تكتب على الشكل $(x-4)^2+y^2=16$
2) نعتبر النقطتين $B$ و $C$ من الدائرة $(C)$ فاصلتهما 5 و 3 على الترتيب و بحيث تراتيبها موجبة. بين أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.
3) استنتج التكاملين التاليين و هذا باستعمال المساحات:
$$I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx \quad ، \quad J=\int_2^6 \sqrt{8x-x^2}\,dx$$








### ✓ الحل

1) الدائرة التي مركزها $A$ و تمر من $O$ هي مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث $AM=OA$
و بما أن $OA=4$ فإن $AM=4$
و عليه $(x-4)^2+y^2=16$.

2) $OC=4$ و $OB=4$
لأن $C$ و $B$ نقطتان من الدائرة $(C)$
ترتيب كل من $B$ و $C$ هو $\sqrt{12}$
و منه $BC=\sqrt{(6-2)^2+0^2}=4$
و منه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

3) حساب $I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx$
الدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{8x-x^2}$ موجبة على المجال $[0\,,8]$ و بالتالي فإن تكامل $f$ على $[0\,,8]$ يساوي مساحة نصف القرص الذي مركزه $A$ و نصف قطره 4 و التي تساوي $\frac{1}{2}\pi\times 4^2$ أي $8\pi$
إذن $I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx=8$
$J=\frac{I}{3}+2\times$ ( مساحة $ACD$ )
$$J=\frac{8}{3}+2\times\frac{2\times\sqrt{12}}{2}=\frac{8}{3}+2\sqrt{12}=\frac{8+6\sqrt{12}}{3}$$

## تطبيق 7 — حساب التكامل باستعمال الخطية

1) إذا علمت أن $\int_0^3 f(x)\,dx=3$ و $\int_0^3 g(x)\,dx=-3$ احسب مايلي:
$$I=\int_0^3 4f(x)\,dx \quad ، \quad J=\int_0^3 \frac{1}{5}g(x)\,dx \quad ، \quad k=\int_0^3 (2f(x)-3g(x))\,dx$$
2) من أجل كل $x$ من المجال $\left]0\,,\frac{\pi}{4}\right[$ قارن بين $\sin x$ و $\cos x$
ثم بين $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$

✓ الحل

1) $I = 4\int_0^3 f(x)dx = 4(3) = 12$ و $J = \frac{1}{5}\int_0^3 g(x)dx = \frac{1}{5}(-3) = \frac{-3}{5}$

$$K = 2\int_0^3 f(x)dx - 3\int_0^3 g(x)dx = 2I - 3J = 15$$

2) من اجل كل $x$ من $]0, \frac{\pi}{4}[$ لدينا $\sin x < \cos x$ و بالتالي $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx$

## تطبيق 8 — المقارنة بين تكاملين

قارن بين العددين الحقيقيين $I$ و $J$ و ذلك بدون حساب قيمتيهما في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $I=\int_0^1 xe^x dx$ و $J=\int_0^1 x^2e^x dx$ ب) $I=\int_{\frac12}^1 x^2 dx$ و $J=\int_{\frac12}^1 x\,Ln\,x$

جـ) $I=\int_0^1 \frac{t}{1+t}dt$ و $J=\int_0^1 \frac{t}{2+t}dt$

✓ الحل

أ) من اجل كل $x$ من $[0,1]$ يكون $x^2 \le x$ بالضرب في $e^x$ نجد $x^2e^x \le xe^x$ و منه
$\int_0^1 x^2e^x dx \le \int_0^1 xe^x dx$ إذن $J \le I$

ب) من اجل كل $x$ من $[\frac12, 1]$ يكون $Ln\,x < x$ بالضرب في $x$ نجد $x\,Ln\,x < x^2$

و منه $\int_{\frac12}^1 x\,Ln\,x < \int_{\frac12}^1 x^2 dx$ إذن $J < I$

جـ) من اجل كل $t$ من $[0,1]$ يكون $1+t < 2+t$ و بالقلب نجد $\frac{1}{2+t} < \frac{1}{1+t}$

وبالضرب في $t$ نجد $\frac{t}{2+t} < \frac{t}{1+t}$ بالمرور إلى التكامل نجد $\int_0^1 \frac{t}{2+t}dt < \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt$

إذن $J < I$ .





## تطبيق 9 — إثبات متباينات

برهن المتباينات التالية :

أ) $1 \le \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}}dt \le 2$ ، ب) $\frac92 \le \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx \le 9$

جـ) $\frac13 \le \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}dt \le \frac12$ ، د) $2\,Ln\,2 \le \int_1^3 Ln(x^2+1)dx \le 2\,Ln10$

✓ الحل

أ) من اجل كل $t$ من $[0,4]$ يكون $0 \le \sqrt{t} \le 2$ بإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد :
$2 \le 2+\sqrt{t} \le 4$ بالقلب نجد $\frac14 \le \frac{1}{2+\sqrt{t}} \le \frac12$ بالمرور إلى التكامل نجد :

$$\int_0^4 \frac14 dt \le \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}}dt \le \int_0^4 \frac12 dt \quad \text{اي} \quad 1 \le \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}}dt \le 2$$

ب) بما أن $0 \le x \le 3$ فإن $1 \le \sqrt{1+x} \le 2$ بالضرب في $x$ نجد :
$x \le x\sqrt{1+x} \le 2x$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$\int_0^3 x\,dx \le \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx \le \int_0^3 2x\,dx \quad \text{اي} \quad \frac92 \le \int_0^3 x\sqrt{1+x} \le 9$$

جـ) من اجل كل $t$ من $[0,1]$ لدينا $\frac13 \le \frac{1}{2+t^2} \le \frac12$ و بالمرور إلى التكامل نجد :

$$\int_0^1 \frac13 dt \le \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}dt \le \int_0^1 \frac12 dt \quad \text{منه نجد} \quad \frac13 \le \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}dt \le \frac12$$

د) من اجل كل $x$ من $[1,3]$ لدينا $2 \le x^2+1 \le 10$ ومنه ينتج:
$Ln2 \le Ln(x^2+1) \le Ln10$

بالمرور إلى التكامل نجد $2\,Ln\,2 \le \int_1^3 Ln(x^2+1)dx \le 2\,Ln10$ .

## تطبيق 10 — حصر تكامل دالة

نريد حصر التكامل $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$ .

1) بدراسة تغيرات الدالتين $h$ و $K$ على المجال $[0,1]$ بحيث:

$K(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$ و $h(x)=e^{-x}+x-1$ بين انه من اجل كل $x$ من $[0\,,\,1]$ يكون $1-x \le e^{-x} \le 1-x+\frac{x^2}{2}$ ... (1)

2) استنتج حصرا لـ $e^{-x^2}$ لما $x$ ينتمي إلى $[0\,,\,1]$ ثم بين انه من اجل كل $x$ من $[0\,,\,1]$ يكون $1-x \le \frac{e^{-x^2}}{1+x} \le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$ .... (2)

3) أ) استنتج انه من اجل كل $x$ من $[0\,,\,1]$ :

$$\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}$$

ب) استنتج من المتباينة (2) ان $\frac{1}{2} \le I \le \frac{5}{24}+\frac{Ln2}{2}$

✓ الحل

1) $h$ قابلة للاشتقاق على $[0\,,\,1]$ ولدينا $h'(x)=-e^{-x}+1$

الدالة $K$ قابلة للاشتقاق على $[0\,,\,1]$ ولدينا $K'(x)=h(x)$

و بما ان $h(x)\ge 0$ فإن $K'(x)\ge 0$

و منه فإن الدالة $K$ متزايدة تماما على $[0\,,\,1]$ .

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $0$ + | |
| $h(x)$ | $0$ ↗ | $\frac{1}{e}$ |

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $K'(x)$ | $0$ + | |
| $K(x)$ | $0$ ↗ | $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ |

$h(x)\ge 0$ يكافئ $e^{-x}\ge 1-x$ ... (*)

$K(x)\ge 0$ يكافئ $e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$ ...(**)

من (*) و (**) نجد $1-x \le e^{-x} \le 1-x+\frac{x^2}{2}$ ... (1)

2) بما ان $x$ ينتمي إلى $[0\,,\,1]$ فإن $x^2\in[0\,,\,1]$ و باستبدال $x$ بـ $x^2$ في المتباينة (1) نجد $1-x^2\le e^{-x^2}\le 1-x^2+\frac{x^4}{2}$ بالقسمة على $1+x$ نجد :

$$1-x \le \frac{e^{-x^2}}{1+x} \le 1-x+\frac{x^4}{1+x} \le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)} \quad ... (2)$$

3) أ) بعد إنجاز القسمة الإقليدية لـ $x^4$ على $1+x$ نجد $\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}$





ب) المتباينة (2) تصبح $1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x)}$

بالتبسيط نجد $1-x\le\frac{e^{-x^2}}{1+x}\le\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2}$ و بالمرور إلى التكامل نجد :

$$\int_0^1(1-x)dx\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2}\right]dx$$

منه نستنتج :

$$\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \le \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx \le \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}Ln(x+1)+\frac{1}{2}x\right]_0^1$$

$\frac{1}{2} \le \int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx \le \frac{5}{24}+\frac{1}{2}Ln(2)$ إذن $\frac{1}{2}\le I\le\frac{5}{24}+\frac{1}{2}Ln(2)$

## تطبيق 11 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

$(I_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx$

1) أ) احسب $I_1$ ثم $I_0+I_1$ و استنتج $I_0$

ب) من اجل كل عدد طبيعي $n$ احسب $I_n+I_{n+1}$

2) برهن انه من اجل كل $x$ من $[0\,,\,1]$

$$\frac{e^{nx}}{1+e}\le\frac{e^{nx}}{1+e^x}\le\frac{e^{nx}}{2}$$

ثم اعط حصرا لـ $I_n$ .

3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(I_n)$ و $\left(\frac{I_n}{e^n}\right)$

✓ الحل

1) من اجل $n=1$ لدينا $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

بوضع $u(x)=e^x+1$ نجد $u'(x)=e^x$ منه :

$$I_1=\int_0^1\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\left[Ln(u(x))\right]_0^1=\left[Ln(e^x+1)\right]_0^1=Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$I_0+I_1=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,dx+\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\int_0^1 1\,dx=1$$

بما أن $I_0+I_1=1$ و $I_1=Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ فإن $I_0=1-Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=Ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

ب) $I_n+I_{n+1}=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx=\int_0^1\frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx$

$$=\int_0^1\frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x}dx=\int_0^1 e^{nx}dx=\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n}e^n-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(e^n-1)$$

2) من اجل كل $x$ من $[0,1]$ لدينا $e\ge e^x\ge1$ ومنه $e+1\ge e^x+1\ge2$

بالقلب نجد $\frac{1}{e+1}\le\frac{1}{e^x+1}\le\frac{1}{2}$ بالضرب في $e^{nx}$ نجد:

$$\frac{e^{nx}}{e+1}\le\frac{e^{nx}}{e^x+1}\le\frac{e^{nx}}{2}\quad ...(1)$$

بمكاملة حدود التباينة (1) نجد $\left[\frac{1}{n(1+e)}e^{nx}\right]_0^1\le I_n\le\left[\frac{1}{2n}e^{nx}\right]_0^1$ بالحساب

نجد: $\frac{1}{n(1+e)}(e^n-1)\le I_n\le\frac{1}{2n}[e^n-1]$ ... (2)

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n-1}{n(e+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n(1-e^{-n})}{n(e+1)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right)\frac{(1-e^{-n})}{(e+1)}=+\infty$

( لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{e+1}=\frac{1}{e+1}$ )

و حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}I_n=+\infty$

- بقسمة طرفي المتابينة (2) على $e^n$ نجد $\frac{1}{n(e+1)}\times\frac{e^n-1}{e^n}\le\frac{I_n}{e^n}\le\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{2n}$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n-1}{e^n}=1$ و $\lim\frac{1}{n(e+1)}=0$ ، $\lim\frac{1}{2n}=0$ فإن،

$\lim\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{n(e+1)}=\lim\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{2n}=0$ و حسب نظرية الحصر فإن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{I_n}{e^n}\right)=0$

## تطبيق 12 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx$

أ) بين أن $0\le I_n\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ ؛ ب) استنتج نهاية المتتالية $(I_n)$ .





### ✓ الحل

أ) من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ يكون $2x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $0\le\cos 2x\le1$

ومنه $0\le x^n\cos 2x\le x^n$ بالمرور إلى التكامل نجد: $0\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx$

لكن $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ و $0<\frac{1}{n+1}\le1$

ومنه $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ إذن $0\le I_n\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

ب) بما أن $0<\frac{\pi}{4}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}=0$ و بالتالي حسب نظرية الحصر نجد: $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

## تطبيق 13 تعيين دالة أصلية لدالة

1) أ) بين أن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3[\cos(3x+2)+x]$ تقبل دالة أصلية $F$ معرفة بـ $F(x)=\sin(3x+2)+3\frac{x^2}{2}+10$

ب) أوجد دالتين أصليتين أخرتين للدالة $f$ .

2) أ) بين أن الدالة $g$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ تقبل دالة أصلية $G$ بحيث $G(x)=Ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$

ب) $H$ دالة معرفة بـ $H(x)=Ln(7x+7)+\frac{x+2}{x+1}$

هل $H$ دالة أصلية لـ $g$ ؟

### ✓ الحل

1) أ) $F$ دالة أصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $F'(x)=f(x)$

الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $F'(x)=3\cos(3x+2)+3x=f(x)$

منه $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

ب) جميع الدوال الأصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ هي من الشكل $F+k$ حيث $k$ ثابت حقيقي

و عليه فإن الدالتين $x\mapsto F(x)+1$ و $x\mapsto F(x)+2$ أصليتان لـ $f$ .

2) أ) $G$ دالة أصلية لـ $g$ على المجال $]0,+\infty[$ إذا وفقط إذا كانت $G'(x)=g(x)$

الدالة $G$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا $G'(x)=g(x)$

منه $G$ دالة أصلية للدالة $g$ على المجال $]0,+\infty[$

ب) الدالة $H$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا $H'(x)=g(x)$

منه $H$ دالة أصلية للدالة $g$ على المجال $]0,+\infty[$

## تطبيق 14 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

1) عين دالة أصلية للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=3x^5+x^4+x$ ، ب) $f(x)=\frac{2x^3+x^2-1}{x^2}$

جـ) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}$ ، د) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

2) عين الدالة الأصلية $G$ للدالة $g$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $g(x)=\frac{2x-1}{(x^2-x)^3}$ على $]1,+\infty[$ ، ب) $g(x)=3(2x-3)^6$ على $\mathbb{R}$

جـ) $g(x)=\sin x\cos x$ على $\mathbb{R}$، د) $g(x)=\frac{5}{(-3x+1)^3}$ على $]-\infty,\frac{1}{3}[$

هـ) $g(x)=\frac{3}{2x-1}$ على المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$

✓ الحل



1) لتكن $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $I$ .

أ) $F(x)=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2$

ب) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=2x+1-\frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto-\frac{1}{x^2}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ و بالتالي $F(x)=x^2+x+\frac{1}{x}$

جـ) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}^*$ هي $x\mapsto Ln|x|$ و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x^2}$

على $\mathbb{R}^*$ هي الدالة $x\mapsto-\frac{1}{x}$ و منه $F(x)=x+Ln|x|-\frac{1}{x}$





د) $f(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x)=x^2-1$ وبالتالي $F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{x^2-1}$

2) أ) $g(x)=(2x-1)(x^2-x)^{-3}$

$g(x)=u'(x)\times(u(x))^{-3}$ حيث $u(x)=x^2-x$ ومنه فإن الدالة $G$ معرفة بـ:

$$G(x)=\frac{u(x)^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{(x^2-x)^2}$$

ب) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=\frac{3}{2}\times u'(x)(u(x))^3$ حيث ؛ $u(x)=2x-3$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto u'(x)(u(x))^3$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{4}(u(x))^4$ اي $x\mapsto\frac{1}{4}(2x-3)^4$

و منه فإن الدالة الأصلية للدالة $g$ هي $G$ حيث $G(x)=\frac{3}{8}(2x-3)^4$

جـ) $g(x)=\sin x\cos x$ و منه $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

الدالة الأصلية للدالة $g$ هي الدالة $G$ حيث $G(x)=-\frac{1}{4}\cos(2x)$

د) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=5(-3x+1)^{-3}$

بوضع $u(x)=-3x+1$ نجد $u'(x)=-3$ و منه $g(x)=\frac{-5}{3}u'(x)(u(x))^{-3}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto u'(x)(u(x))^{-3}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{-1}{2}(u(x))^{-2}$

و منه فإن الدالة الأصلية $G$ للدالة $g$ معرفة بـ: $G(x)=\frac{5}{6(-3x+1)^2}$

هـ) بوضع $u(x)=2x-1$ نجد $u'(x)=2$ منه $g(x)$ تكتب على الشكل $g(x)=\frac{3}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ هي $x\mapsto Ln(2x-1)$

و منه فإن الدالة الأصلية $G$ للدالة $g$ معرفة بـ $G(x)=\frac{3}{2}Ln(2x-1)$

## تطبيق 15 تعيين دالة أصلية تحقق شرط معطى

أوجد الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ على مجال $I$ يطلب تعيينه.

أ) $f(x)=x^2-3x-1$ و $F(0)=0$ ؛ ب) $f(x)=\frac{1}{x^2}+x$ و $F(1)=0$

جـ) $f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ و $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ، د) $f(x)=\frac{-1}{2-x}$ و $F(1)=1$

✓ الحل

أ) الدالة $f$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و دوالها الأصلية هي $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x+k$

$F(0)=0$ يكافئ $k=0$ ومنه الدالة الأصلية للدالة $f$ هي $x\mapsto \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x$

ب) الدالة $f$ معرفة و مستمرة على $]0,+\infty[$ و دوالها الأصلية على هذا المجال هي :

$F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+k$ ،

$F(1)=0$ يكافئ $k=\frac{1}{2}$ و منه الدالة الأصلية هي $x\mapsto \frac{-1}{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ .

جـ) الدالة $f$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و دوالها الأصلية من الشكل :

$F(x)=\frac{-1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ يكافئ $k=\frac{\sqrt{2}}{8}$

ومنه الدالة الأصلية هي $x\mapsto\frac{-1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}$

د) الدالة $f$ معرفة و مستمرة على المجال $]-\infty,2[$ و دوالها الأصلية هي :

$F(x)=Ln(2-x)+k$

$F(1)=1$ يكافئ $k=1$ ومنه الدالة الأصلية التي تحقق الشرط هي $x\mapsto Ln(2-x)+1$

## تطبيق 16 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

أوجد دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=3e^{-2x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

ب) $f(x)=\sqrt{x+2}+\frac{x}{2\sqrt{x+2}}$ ، $I=]-2,+\infty[$

جـ) $f(x)=\frac{1}{xLnx}$ ، $I=]1,+\infty[$

د) $f(x)=1+\frac{1}{\tan^2 x}$ ، $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

هـ) $f(x)=\tan^2 x$ ، $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

و) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{x+1}{x-2}}$ ، $I=]2,+\infty[$

ي) $f(x)=\frac{Lnx}{x}$ ، $I=]0,+\infty[$





✓ الحل

أ) نضع $u(x)=-2x+1$ منه $u'(x)=-2$ عندئذ $f(x)=\frac{-3}{2}u'(x)e^{u(x)}$

و منه الدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ المعرفة بـ $F(x)=\frac{-3}{2}e^{u(x)}=\frac{-3}{2}e^{-2x+1}$

ب) نضع $u(x)=x$ و $v(x)=\sqrt{x+2}$ عندئذ $u'(x)=1$ و $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

بالتالي $f(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ المعرفة بـ $F(x)=(u\times v)(x)$ اي $F(x)=x\sqrt{x+2}$

جـ) يمكن كتابة $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{Lnx}$ وبوضع $u(x)=Lnx$ نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$

ومنه $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة $f$ على $]1,+\infty[$ هي $F(x)=Ln(u(x))$ اي $F(x)=Ln(Ln\, x)$

د) من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

و منه $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}=(\tan x)'\times\tan^{-2}x=u'(x)u^{-2}(x)$ حيث $u(x)=\tan x$

و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ المعرفة بـ $F(x)=-\frac{1}{u(x)}$

اي $F(x)=\frac{-1}{\tan x}$

هـ) لدينا $f(x)=\tan^2 x$ و لدينا $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

ومنه $\tan^2 x=(\tan x)'-1$ و بالتالي $f(x)=(\tan x)'-1$

إذن الدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ المعرفة بـ $F(x)=\tan(x)-x$

و) بوضع $u(x)=\frac{x+1}{x-2}$ نجد $u'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ و منه $f(x)=\frac{1}{-3}(u'(x))e^{u(x)}$

و عليه فالدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ المعرفة بـ $F(x)=\frac{-1}{3}e^{u(x)}$

اي $F(x)=-\frac{1}{3}e^{\frac{x+1}{x-2}}$

ي) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $\frac{1}{x}\times Lnx$ و بوضع $u(x)=Lnx$ نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$

و بالتالي $f(x)=u'(x)u(x)$ و عليه فالدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ حيث :

$f(x)=\frac{1}{2}(Lnx)^2$

## تطبيق 17 تعيين دالة أصلية لدالة ناطقة

1) $f$ دالة معرفة على $I=]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+4}{(x+1)^2}$

أ) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$

ب) استنتج دالة أصلية لـ $f$ على $I$.

2) $g$ دالة معرفة على $J=]2,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$

أ) اكتب $g(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة $g$ على $I$.

3) $h$ دالة معرفة على $H=]1,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2-1}$

أ) اكتب $h(x)$ على الشكل $h(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}$

ب) استنتج دالة أصلية لـ $h$ على $H$.

### ✓ الحل

1) أ) بتوحيد المقامات نجد $f(x)=\frac{ax+a+b}{(x+1)^2}$ و بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$a=1$ و $b=3$ و عليه $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

ب) الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ هي $x\mapsto Ln(x+1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{(x+1)^2}$ هي $x\mapsto\frac{-3}{x+1}$

و بالتالي الدالة الأصلية لـ $f$ هي $F(x)=Ln(x+1)+\frac{-3}{x+1}$

2) أ) بنفس الكيفية السابقة نجد أن $g(x)=2x+1+\frac{3}{x-2}$

ب) الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto 2x+1$ هي الدالة $x\mapsto x^2+x$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{x-2}$ هي الدالة $x\mapsto 3\,Ln(x-2)$

و بالتالي الدالة الأصلية لـ $g$ هي $F(x)=x^2+x+3\,Ln(x-2)$

3) أ) بنفس الكيفية السابقة نجد $h(x)=x+1+\frac{3}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}$







الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{2}\times\frac{1}{x-1}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{3}{2}Ln(x-1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{2}\times\frac{1}{x+1}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{3}{2}Ln(x+1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x+1$ هي الدالة $x\mapsto\frac{x^2}{2}+x$

و بالتالي الدالة الأصلية للدالة $h$ هي $F$ حيث $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}Ln(x-1)-\frac{3}{2}Ln(x+1)$ .

## تطبيق 18 تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^3 x$

1) باستعمال العلاقة $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ بين أن $f(x)=\cos x-\cos x\,\sin^2 x$

2) استنتج دالة أصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}$ .

### ✓ الحل

1) من العلاقة $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ نجد $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

منه $f(x)=\cos x\cos^2 x=\cos x\left(1-\sin^2 x\right)=\cos x-\cos x\sin^2 x$

الدالة $x\mapsto\cos x\sin^2 x$ من الشكل $x\mapsto u'(x)\,u^2(x)$ حيث $u(x)=\sin x$

و بالتالي فإن دالتها الأصلية هي $x\mapsto\frac{\sin^3 x}{3}$

إذن الدالة الأصلية للدالة $f$ هي الدالة $F$ حيث $F(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$

## تطبيق 19 تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin^2 x\,\cos^3 x$

1) بين أن $f(x)=\cos x\,\sin^2 x-\cos x\,\sin^4 x$ .

2) استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

### ✓ الحل

1) لدينا $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ منه $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

إذن $f(x)=\sin^2 x\,\cos x\,\cos^2 x$

$=\sin^2 x\,\cos x\left(1-\sin^2 x\right)=\cos x\,\sin^2 x-\cos x\,\sin^4 x$

2) الدالة $x \mapsto \cos x \ \sin^4 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)\left(u(x)\right)^4$

و بالتالي دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{5}\left(u(x)\right)^3$ أي $x \mapsto \frac{1}{5}\sin^5 x$

الدالة $x \mapsto \cos x \ \sin^2 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)\left(u(x)\right)^2$

و منه فإن دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3}\left(u(x)\right)^3$ أي $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$

إذن الدالة الأصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ هي $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$ .

و بصفة عامة إذا كانت $f(x) = a\cos^n x \ \sin^p x$ مع $p$ و $n$ طبيعيين غير معدومين فإن:

- إذا كان احدهما فردي و الآخر زوجي نستعمل المساواة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ التي تسمح لنا بكتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \sin x \times q(\cos x)$ حيث $q$ دالة كثيرة حدود و بهذه الكتابة نستطيع تعيين دالة اصلية لـ $f$ .
- إذا كان $p$ و $n$ كليهما زوجي نستعمل الكتابة الخطية مما يسمح لنا بكتابة $f(x)$ على شكل مجاميع من الشكل $\lambda \cos(\alpha x)$ او $\mu \sin(\beta x)$ و التي دالتها الأصلية معروفة.

## تطبيق 20 تعيين دالة اصلية لدالة أسية

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 e^{3x}$

اوجد دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ بحيث $F(x) = p(x)e^{3x}$ مع $p$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

### ✓ الحل

$p(x)$ من الدرجة الثالثة هنا يعني أن $p(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

حيث $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ أعداد حقيقية و $a \neq 0$

بما ان $F$ دالة اصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}$

فإنه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $F'(x) = p'(x)e^{3x} + 3e^{3x}p(x) = e^{3x}\left(p'(x) + 3p(x)\right)$

$$= \left[3a x^3 + (3a+3b)x^2 + (2b+3c)x + c + 3d\right] e^{3x}$$

و لدينا من جهة اخرى $F'(x) = f(x)$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد $a = \frac{1}{3}$ ، $b = \frac{-1}{3}$ ، $c = \frac{2}{9}$ و $d = \frac{-2}{27}$

ومنه $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^{3x}$





## تطبيق 21 حساب القيمة المتوسطة لدالة

احسب القيمة المتوسطة $M$ للدالة $f$ حيث $y = f(x) = \cos^2(\alpha x)$ على المجال $\left[0 , \frac{\pi}{\alpha}\right]$

### ✓ الحل



$$M = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^2(\alpha t)\,dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{1+\cos(2\alpha t)}{2}\right)dt = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha t)\right]dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\alpha}\sin(2\alpha t)\right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

## تطبيق 22 تعيين اتجاه تغير دالة اصلية

$F$ دالة معرفة بـ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

ا) احسب $F(0)$ ثم $F'(x)$ ، ب) ادرس اتجاه تغيرات الدالة $F$ .

### ✓ الحل

1) $F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 0$

الدالة $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة اصلية $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) بما انه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $\frac{1}{1+x^2} > 0$ فإن $F'(x) > 0$

و منه فإن $F$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

## تطبيق 23 حساب التكاملات باستعمال الدالة الأصلية

احسب التكاملات التالية ،

أ) $I=\int_0^2 (x-2)\,dx$ ، ب) $I=\int_0^1 (t^2-3t+1)\,dt$

جـ) $I=\int_0^1 (2t+1)(t^2+t)^3\,dt$ ، د) $I=\int_{Ln2}^{Ln3} e^{2x}\,dt$

هـ) $I=\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dt$ ، و) $I=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}}$

ن) $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{3x+4}}\,dx$ ، ي) $I=\int_{-2}^{-1} \frac{x-5}{x}$

✓ **الحل**

أ) $I=\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^2=[2-4]-(0)=-2$

ب) $I=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1=-\frac{1}{6}$

جـ) $I=\left[\frac{(t^2+t)^4}{4}\right]_0^1=4$

د) $I=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{Ln2}^{Ln3}=\frac{1}{2}e^{Ln9}-\frac{1}{2}e^{Ln4}=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

هـ) $I=\int_0^1 \frac{3}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{3}{2}\int_0^1 u'(x)u^{-2}(x)\,dx$

$=\left[\frac{-3}{2u(x)}\right]_0^1=\left[\frac{-3}{2(x^2+1)}\right]_0^1=\frac{3}{4}$

و) $I=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}}=\int_0^3 \frac{(2+t)'}{\sqrt{2+t}}\,dt=\left[2\sqrt{2+t}\right]_0^3=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

ن) $I=\int_0^4 \frac{1}{3}\,\frac{3}{\sqrt{3x+4}}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^4 \frac{(3x+4)'}{\sqrt{3x+4}}\,dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\right]_0^4=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

ي) $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-5}{x}\,dx=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{5}{x}\right)dx=\left[x-5Ln(-x)\right]_{-2}^{-1}=1+5Ln2$







## تطبيق 24 تعيين دالة أصلية باستعمال علاقة شال و مساحة قرص

$f$ معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{4-(x-1)^2},\; x\in[-1\;,\;1] \\ f(x)=\frac{2}{x}\;,\; x\geq 1 \end{cases}$$

1) بين ان منحنى الدالة $f$ على المجال $[-1\;,\;1]$ هو ربع دائرة ثم مثل بيان $f$

2) استعمل علاقة شال لحساب التكاملين $I=\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ ،

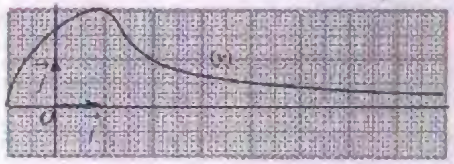
$J=\int_{4}^{-1} f(x)\,dx$

✓ **الحل**

1) من اجل كل $x$ من $[-1\;,\;1]$ نضع $y=\sqrt{4-(x-1)^2}$ بتربيع الطرفين نجد $y^2=\left(4-(x-1)^2\right)$ ومنه نستنتج $(x-1)^2+y^2=4$ إذن النقطة $M(x,y)$ تنتمي الى الدائرة التي مركزها $\Omega(1,0)$ و طول نصف قطرها $R=2$ .

و بما ان $x\in[-1,1]$ و $y\rangle 0$

فإن $(\gamma)$ هو ربع دائرة



2) $I=\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

$I=\frac{1}{4}S+2\left[Ln\,x\right]_1^3=\frac{1}{4}\pi\times 4+2\,Ln2=\pi+2\,Ln2$ حيث ( $S$ مساحة الدائرة)

$J=\int_{4}^{-1} f(x)\,dx=\int_{4}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{-1} f(x)\,dx$

$=\left[2\,Ln(x)\right]_4^1-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=-2\,Ln4-\pi$

## تطبيق 25 حساب التكاملات

1) احسب $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

2) احسب $I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ إذا علمت أن $I_2+I_1$ ثم استنتج قيمة $I_2$ .

✓ الحل

1) $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\left[Ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}Ln\,2$

2) $I_1+I_2=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx+\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

إذن $\begin{cases} I_1+I_2=\frac{1}{2} \\ I_1=\frac{1}{2}Ln\,2 \end{cases}$ منه نجد $I_2=\frac{1}{2}-I_1$ أي $I_2=\frac{1}{2}(1-Ln\,2)$



## تطبيق 26 حصر تكامل دالة

1) مثل الدالة $f$ المعرفة على $[0\ ,\ 1]$ بـ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ (الوحدة 8cm)

(جزئ المجال $[0\ ,\ 1]$ إلى 8 مجالات متساوية الطول).

2) باستعمال طريقة المستطيلات احصر مساحة الحيز من المستوي تحت منحني الدالة $f$ ثم احسب سعة هذا الحصر و التي تمثل حاد من الأعلى للفرق بين مساحة المستطيلات الكبرى و مساحة المستطيلات الصغرى

استنتج حصرا لـ $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

✓ الحل

2) $\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k}{8}\right) \ge \mathcal{A} \ge \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k-1}{8}\right)$

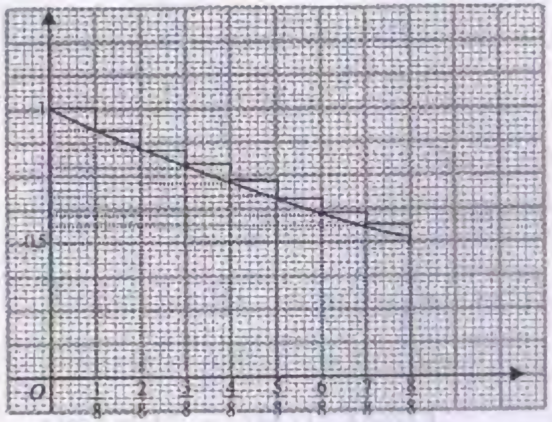
ومنه $314\times10^{-15} \ge \mathcal{A} \ge 213\ ,\ 28\times10^{-15}$

سعة الحصر هي $M=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k}{8}\right)-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k-1}{8}\right)\approx 1{,}0072\times10^{-13}$

إذن $314\times10^{-15} \ge \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt \ge 213\ ,\ 28\times10^{-15}$








التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[0\ ,\ 1]$

## تطبيق 27 تعيين دالة أصلية باستعمال التكامل بالتجزئة

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية على المجال المعطى و التي تنعدم عند $a$

1) $f(x)=(2x+1)Ln\,x$ ، $I=]0\ ,\ +\infty[$ ، $a=1$

2) $f(x)=(2x+1)e^x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

3) $f(x)=x\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=\frac{\pi}{2}$

4) $f(x)=(Ln\,x)^2$ ، $I=]0\ ,\ +\infty[$ ، $a=1$

5) $f(x)=e^{-2x}\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

✓ الحل

1) بوضع $u'(x)=2x+1$ و $v(x)=Ln\,x$ يكون $u(x)=x^2+x$ و $v'(x)=\frac{1}{x}$

$F(x)=\int_1^x u'(t)v(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_1^x-\int_1^x u(t)v'(t)\,dt$

$=\left[u(t)v(t)\right]_1^x-\int_1^x \frac{t^2+t}{t}\,dt=\left[(t^2+t)Ln\,t\right]_1^x-\int_1^x (t+1)\,dt$

$=\left[(t^2+t)Ln\,t-\frac{t^2}{2}-t\right]_1^x=\left[(x^2+x)Ln\,x-\frac{x^2}{2}-x\right]-\left[-\frac{1}{2}-1\right]$

$$=(x^2+x)Ln(x)-\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$$

2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (2t+1)e^t dt$

بوضع $u(t)=2t+1$ و $v'(t)=e^t$ يكون $u'(t)=2$ و $v(t)=e^t$

$$F(x)=\int_0^x u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)dt$$

$$=[(2t+1)e^t]_0^x-\int_0^x 2e^t\,dt=[(2t+1)e^t-2e^t]_0^x$$

$$=(2x+1)e^x-2e^x+1=e^x(2x-1)+1$$

3) $f(x)=x\cos x$ و $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$

بوضع $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=\cos t\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=\sin t\end{cases}$

$$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_{\frac{\pi}{2}}^x-\int_{\frac{\pi}{2}}^x u'(t)v(t)dt$$

$$=[t\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^x-\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t\,dt=x\sin x-\frac{\pi}{2}+[\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^x$$

$$=x\sin x-\frac{\pi}{2}+\cos x$$

4) بوضع $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=(Ln\,x)^2\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\frac{2}{x}Ln\,x\end{cases}$

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_1^x-\int_1^x [u(t)v'(t)]\,dt$$

$$=\left[t(Ln\,t)^2\right]_1^x-\int_1^x 2\,Ln\,t\,dt=\left[t(Ln\,t)^2\right]_1^x-\left[2(t\,Ln(t)-t)\right]_1^x$$

$$=\left[t(Ln\,t)^2-2t\,Ln(t)+2t\right]_1^x=x(Ln\,x)^2-2x\,Ln\,x+2x-2$$

5) $F(x)=\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt$

بوضع $\begin{cases}u(t)=e^{-2t}\\ v'(t)=\cos t\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u'(t)=-2e^{-2t}\\ v(t)=\sin t\end{cases}$







$$F(x)=\int_0^x u(t)v'(t)dt=\left[e^{-2t}\sin t\right]_0^x-\int_0^x -2(\sin t)e^{-2t}dt$$

$$=e^{-2x}\sin x+2\int_0^x (\sin t)(e^{-2t})dt$$

نضع $G(x)=\int_0^x (\sin t)e^{-2t}dt$ ونستعمل التكامل بالتجزئة مرة أخرى لتعيين الدالة $G$

بوضع $\begin{cases}u'(t)=\sin t\\ v(t)=e^{-2t}\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u(t)=-\cos t\\ v'(t)=-2e^{-2t}\end{cases}$

$$G(x)=\left[(-\cos t)e^{-2t}\right]_0^x-\int_0^x 2e^{-2t}\cos t\,dt$$

$$G(x)=-(\cos x)e^{-2x}+1-2F(x)$$

إذن $F(x)=e^{-2x}\sin(x)-2(\cos x)e^{-2x}+2-4F(x)$

$$5F(x)=e^{-2x}\sin x-2(\cos x)e^{-2x}+2$$

$$5F(x)=e^{-2x}[\sin x-2\cos x]+2$$

$$F(x)=\frac{1}{5}e^{-2x}[\sin x-2\cos x]+\frac{2}{5}$$

## تطبيق 28 حساب التكامل باستعمال التجزئة

نعتبر التكامل التالي $I_{(n,k)}=\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ حيث $n$ و $k$ عددان طبيعيان غير معدومين و $k\le n$

1) أوجد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ ثم استنتج $I_{(n,k)}$ بدلالة $n$ و $k$

2) احسب $I_{(2,1)}$ و $I_{(5,2)}$

### ✓ الحل

1) لإيجاد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ نستعمل التكامل بالتجزئة

بوضع $u'(x)=kx^{k-1}$ يكون $u(x)=x^k$

$v(x)=-\frac{1}{n-(k-1)}(1-x)^{n-(k-1)}$ يكون $v'(x)=(1-x)^{n-k}$

و عليه $I_{(n,k)}=-\frac{1}{n-(k-1)}\left(\left[x^k(1-x)^{n-(k-1)}\right]_0^1-\int_0^1 kx^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}dx\right)$

اي $I_{(n,k)} = \frac{k}{n-(k-1)} \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}\, dx = \frac{k}{n-(k-1)} I(n , k-1)$

لدينا $I_{(n,k)} = \frac{k}{n-(k-1)} I(n , k-1) = \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} I(n , k-2)$

$$= \frac{k}{n-(k-1)} \frac{k-1}{n-(k-2)} \frac{k-2}{n-(k-3)} I(n , k-3)$$

$$= \frac{k}{n-(k-1)} \frac{k-1}{n-(k-2)} \frac{k-2}{n-(k-3)} \cdots \frac{2}{n-1} \frac{1}{n} I(n ,0)$$

$$= \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n ,0)$$

إذن $I(n,k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n ,0)$

لكن $I_{(n,0)} = \int_0^1 (1-x)^n\, dx = -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

و بالتالي $I_{(n,k)} = \frac{k!(n-k)!}{n!} \times \frac{1}{n+1}$



2) $I_{(2,1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ و $I_{(5,2)} = \frac{1}{60}$

## تطبيق 29 حساب مساحة حيز من المستوي

$g$ دالة معرفة على $]1 , +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

1) بين ان $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

ماهي المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة $g$ .

2) احسب مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى $g$ و المستقيمات التي معادلاتها $y=x+2$ و $x=4$ و $x=m$ مع $m > 4$ ;

عين نهاية هذه المساحة لما $m \to +\infty$

✓ الحل

1) من اجل كل $x \neq 1$ لدينا

$$x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2+3(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$





بما ان $\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} g(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة $g$ .

بما ان $\lim_{|x|\to+\infty} g(x)-(x+2)=0$ فإن المنحني له مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) من اجل كل $x > 4$ لدينا $g(x)-(x+2) > 0$ و منه المنحني $(\gamma)$ للدالة $g$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x+2$

و عليه فالمساحة بين $(\gamma)$ و $(\Delta)$ هي $S=\int_4^m [g(x)-(x+2)]\, dx$

$$S = \int_4^m \left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \left[3\, Ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\right]_4^m$$

$$= \left(3\, Ln(m-1)-\frac{1}{m-1}-3\, Ln\, 3+\frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{m\to+\infty} S = +\infty$$

## تطبيق 30 حساب مساحة حيز من المستوي

$f$ دالة معرفة على $]0 , +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x}(1+Ln\, x)$ .

1) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم ارسم منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 3cm$

2) عين $m$ فاصلة نقطة تقاطع $(\gamma)$ مع محور الفواصل.

3) ليكن $S_1$ الحيز المحصور بين $(\gamma)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=\frac{1}{e}$ و $x=1$ و ليكن $S_2$ الحيز المحصور بين $(\gamma)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=1$ و $x=a$ مع $a > 1$ عين $a$ بحيث ان الحيزين $S_1$ و $S_2$ لهما نفس المساحة.

✓ الحل

1) $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} (1+Ln\, x) = -\infty$

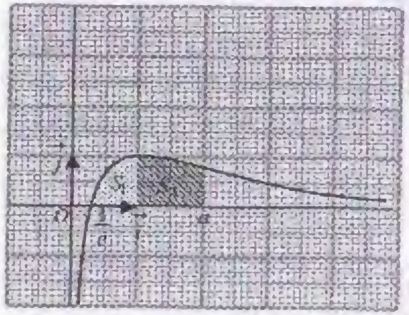
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\times\infty$ عدم التعيين

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{Ln\,x}{x}\right)=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\overset{+}{0}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0\ ,\ +\infty[$ ولدينا $f'(x)=\frac{-Ln\,x}{x^2}$

$f'(x)=0$ يكافئ $Ln\,x=0$ يكافئ $x=1$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-Ln\,x$



| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | |
| تغيرات $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

2) فاصلة نقطة التقاطع $(\gamma)$ مع $(xx')$ هي حل للمعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0$ يكافئ $1+Ln\,x=0$ يكافئ $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

إذن $m=\frac{1}{e}$

3) $S_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(t)\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{1}{t}+\frac{Ln\,t}{t}\right)dt=\left[Ln\,t+\frac{1}{2}(Ln\,t)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$

$=-Ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{2}\left(Ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (وحدة المساحة)

إذن $S_1=\frac{9}{2}cm^2$

$S_2=\left[Ln\,t+\frac{1}{2}(Ln\,t)^2\right]_1^a=Ln\,a+\frac{1}{2}(Ln\,a)^2$

$S_2=9\left[Ln\,a+\frac{1}{2}(Ln\,a)^2\right]cm^2$

$S_2=S_1$ يكافئ $9\left[Ln\,a+\frac{1}{2}(Ln\,a)^2\right]=\frac{9}{2}$ يكافئ $2Ln(a)+(Ln(a))^2=1$

بوضع $Ln\,(a)=\alpha$ نجد $\alpha^2+2\alpha-1=0$ ... (*)

$\Delta=4-4(1)(-1)=8$ و منه المعادلة (*) لها حلان $\alpha_1=-1+\sqrt{2}$ و $\alpha_2=-1-\sqrt{2}$

**الحالة الأولى** $\alpha=\alpha_1$

$Ln\,a=\alpha_1$ يكافئ $a=e^{-1+\sqrt{2}}$ مقبول

**الحالة الثانية** $\alpha=\alpha_2$ :

$Ln\,a=\alpha_2$ يكافئ $a=e^{-1-\sqrt{2}}$ ⟨ 1 مرفوض إذن قيمة $a$ المطلوبة هي $e^{-1+\sqrt{2}}$







## تطبيق 31 حساب المساحة بين منحنيين و محور الفواصل

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x}$ و $g(x)=(x+1)e^{-x}$

1) ادرس تغيرات الدالتين $f$ و $g$ ثم ارسم منحنيهما البيانيين $(C_f)$ و $(C_g)$ في معلم متعامد و متجانس طول الوحدة 1 cm

2) نعتبر المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $x=m$ مع $m>0$ باستعمال التكامل بالتجزئة احسب بدلالة $m$ المساحة $S(m)$ لحيز المستوي المحدود بين $(xx')$ و المستقيم $(\Delta)$ و المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$

3) ماهي نهاية هذه المساحة لما $m$ يؤول إلى $(+\infty)$

### ✓ الحل

1) دراسة تغيرات $f$ :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-e^{-x}$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $f'(x)<0$

و بالتالي فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

دراسة تغيرات $g$ :

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+xe^{-x}\right)=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1+x)=-\infty$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=-xe^{-x}$

$g'(x)=0$ يكافئ $x=0$

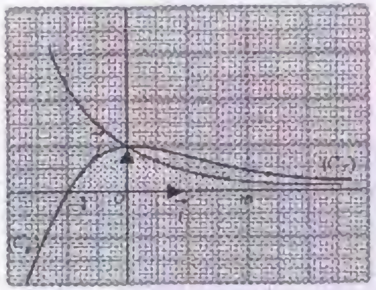
إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)<0$ و إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g'$ | | + | 0 | - | |
| تغيرات $g$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

$(C_g)$ يقطع $(xx')$ في النقطة $A(-1,0)$

2) $S(m)=\int_{-1}^{0} g(x)\,dx+\int_{0}^{m} f(x)\,dx$



$$= \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{m} e^{-x}\,dx$$

$$\int_{0}^{m} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{0}^{m} = -e^{-m}+1$$

نحسب $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة.

بوضع $\begin{cases}u(x)=x+1\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$ ، يكون $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} u(x)v'(x)\,dx = \left[-e^{-x}(x+1)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x}\,dx$$

$$=\left[e^{-x}(-x-2)\right]_{-1}^{0} = (-2)-(e)(-1) = -2+e$$

إذن $S(m) = -2+e-e^{-m}+1 = -e^{-m}+e-1$

3) $\lim_{x\to+\infty} S(m) = \lim_{m\to+\infty}\left(-e^{-m}+e-1\right) = e-1$

## تطبيق 32

حساب المساحات

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-2)+e^{1-x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$ ثم حدد الوضع النسبي لـ $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

2) $\lambda$ عدد حقيقي موجب، نعتبر حيز المستوي المحدود بـ $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=0$ و $x=\lambda$
عبر عن $S_1$ مساحة هذا الحيز بدلالة $\lambda$.

3) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{1-x}$
$A$ نقطة إحداثياها $(\lambda\ ,\ 0)$ و $B$ نقطة من $(C_g)$ فاصلتها $\lambda$ . المماس لـ $(C_g)$ عند $B$ يقطع محور الفواصل في نقطة $C$ .
- احسب إحداثيات $C$ ثم $S_2$ مساحة المثلث $ABC$ .
- بين أن $S_1+2S_2$ مستقل عن $\lambda$ .





### ✓ الحل

1) $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ وبما أن $\lim_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$ $= \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]$
فإن $y=x-2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$
لدينا $f(x)-(x-2)=e^{1-x}$
من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{1-x}>0$ و منه فإن المنحني $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$

2) بما أن المنحني $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ فإن المساحة $S_1$ هي

$$S_1 = \int_{0}^{\lambda}\left[f(x)-(x-2)\right]dx = \int_{0}^{\lambda} e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_{0}^{\lambda} = -e^{1-\lambda}+e$$

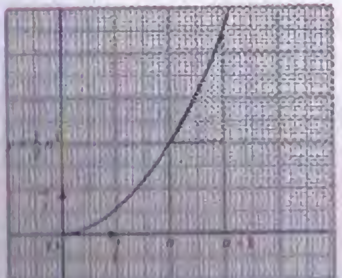
3) $A(\lambda\ ,\ 0)$ ، $B(\lambda\ ,\ e^{1-\lambda})$
المماس لـ $(C_g)$ عند $B$ معادلته $y=-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}$
فاصلة نقطة تقاطع المماس مع $(xx')$ هي حل للمعادلة $-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}=0$
$-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}=0$ يكافئ $\lambda e^{1-\lambda}+e^{1-\lambda}=x e^{1-\lambda}$ يكافئ $x=\lambda+1$
منه $C(\lambda+1\ ,\ 0)$
مساحة المثلث $ABC$ هي $S_2=\frac{e^{1-\lambda}}{2}$
$S_1+2S_2=-e^{1-\lambda}+e+e^{1-\lambda}=e$ ومنه $S_1+2S_2$ مستقل عن $\lambda$

## تطبيق 33

حساب المساحات

$(\gamma)$ جزء من قطع مكافئ ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x^2$ مع $x\geq 0$ .
$n$ عدد طبيعي و $U_n$ مساحة حيز المستوي المحدد بـ $(\gamma)$ و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=n+1$ و $y=\frac{1}{2}n^2$ . بين أن المتتالية $(U_n)$ حسابية

### ✓ الحل



$$U_n=\int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}n^2\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}n^2x\right]_{n}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{2}n^2(n+1)-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^3=\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}$$

بما أن $U_n=an+b$ فإنها حسابية أساسها النصف و حدها الأول السدس

## تطبيق 34 حساب المساحات

(γ) قطع مكافئ معادلته $y=x^2+3x+2$


1) اكتب معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة $D(-1,0)$

2) أعط معادلة المستقيم (DF) حيث $F(-3,2)$

3) احسب المساحة الملونة في الشكل.

### الحل

1) دالة القطع المكافئ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $y'=f'(x)=2x+3$ و منه $f'(-1)=1$ إذن $y=x+1$ ، $(T)$

2) $y=ax+b$ ، $(DF)$

$D\in(DF)$ تكافئ $-a+b=0$ ... (1)

$F\in(DF)$ تكافئ $-3a+b=2$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $a=-1$ و $b=-1$ منه $y=-x-1$ ، $(DF)$

3) على المجال $[-4\,,\,-3]$ المنحني يقع فوق $(DF)$

و على المجال $[-3\,,\,-1]$ المنحني يقع تحت $(DF)$

و على المجال $[-1\,,\,0]$ المنحني يقع فوق $(T)$ و عليه

$$S=\int_{-4}^{-3}\left(-y_{(DF)}+f(x)\right)dx+\int_{-3}^{-1}\left(y_{(DF)}-f(x)\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(f(x)-y_{(T)}\right)dx$$

$$=\int_{-4}^{-3}\left(x^2+4x+3\right)dx+\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right]_{-4}^{-3}+\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{64}{3}-20+\frac{1}{3}+3+\frac{1}{3}=\frac{64-60+1+9+1}{3}=\frac{15}{3}=5$$

إذن $S=5$ وحدة مربعة.







## تطبيق 35 حساب مساحة القطع الناقص و الدائرة

1) بين أن مساحة ربع قرص مركزه النقطة $O$ و نصف قطره $a$ مع $a>0$ موجود في الربع الأول من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس هي

$$\mathcal{A}_D=\frac{\pi}{4}a^2=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

2) ليكن $(E)$ قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مع $a>0$ و $b>0$

احسب المساحة $\mathcal{A}_{(E)}$ للقطع الناقص

### الحل

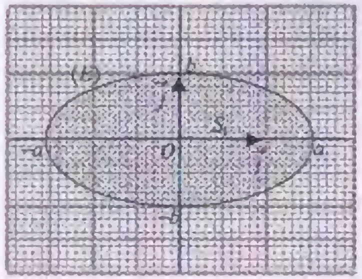
1) الدائرة التي مركزها $O$ و نصف قطرها $a$ معادلتها $x^2+y^2=a^2$

و منه $y=\sqrt{a^2-x^2}$ إذن مساحة ربع القرص تساوي ربع مساحة القرص أي $\frac{1}{4}\pi a^2$

و من جهة ثانية هذه المساحة تمثل مجموعة النقط $M$ المعرفة بـ :

$a\geq x\geq 0$ و $\sqrt{a^2-x^2}\geq y\geq 0$ أي $\mathcal{A}_D=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

2) مساحة القطع الناقص تساوي $4S_1$




و هذا سبب التناظرات الموجودة في هذا الشكل

$S_1$ هي مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث

$a\geq x\geq 0$ و $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\geq y\geq 0$

$$\mathcal{A}_{(E)}=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\int_0^a 4\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\,\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

## تطبيق 36 حساب حجم المخروط الدوراني

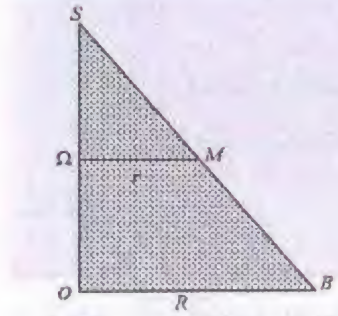
في معلم للفضاء نعتبر المخروط الدوراني الذي رأسه النقطة $S(0,0,4)$ و قاعدته دائرة مركزها النقطة $O$ و نصف قطرها 2 من المستوي $(xoy)$

نقطع هذا المخروط بمستوي معادلته $Z=a$ حيث $4\geq a\geq 0$

1) عين نصف قطر الدائرة الناتجة من تقاطع المخروط و المستوي ذي المعادلة

$Z=a$ بدلالة $a$ ثم عين مساحة قرص التقاطع.

2) استنتج حجم هذا المخروط بواسطة التكامل ثم احسبه بدلالة الدستور $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ حيث $R$ نصف قطر دائرة القاعدة و $h$ الارتفاع.




**✓الحل**

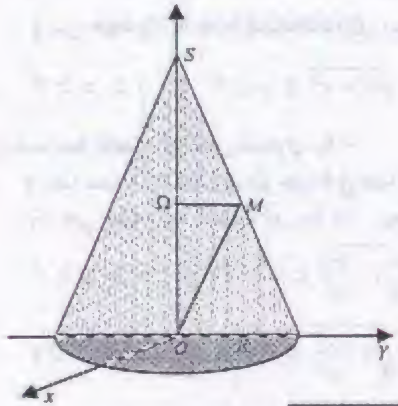
1) نصف قطر الدائرة هو $\Omega M$

حسب نظرية طاليس لدينا $\frac{O\Omega}{OS}=\frac{\Omega M}{OB}$ و منه ،

$$r=\Omega M=\frac{OB\times O\Omega}{OS}$$

$$=\frac{R\times a}{4}=\frac{aR}{4}$$

مساحة القرص هي $\pi r^2$ أي $\pi\frac{a^2R^2}{16}$




2)

$$V=\int_0^4 \frac{\pi\ a^2 R^2}{16}\ da$$

$$=\frac{\pi R^2}{16}\int_0^4 a^2\,da=\frac{\pi R^2}{16}\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^4$$

$$=\frac{\pi R^2\times 64}{16\times 3}=\frac{4}{3}\pi\pi^2$$

لدينا $V=\frac{\pi R^2}{3}h$ و $h=4$

و منه $V=\frac{4\pi R^2}{3}$

## تطبيق 37 حساب حجم مجسم دوراني

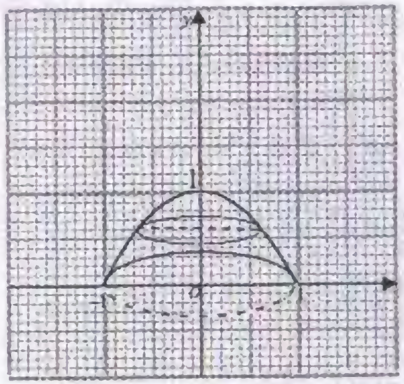
في معلم متعامد و متجانس $(p)$ قطع مكافئ معادلته ... ممثل في المجال $[-1\ ,\ 1]$ .

بتدوير $(p)$ حول محور التراتيب يولد مجسما دورانيا $(\Sigma)$

ماهي طبيعة مقطع من $(\Sigma)$ بمستوي عمودي على $(o\,y)$ ثم عبر بدلالة $a$ حيث $1\ge a\ge 0$ عن مساحته $S(a)$ ثم احسب حجم $(\Sigma)$ .








**✓الحل**

طبيعة مقطع من $(\Sigma)$ هي دائرة

معادلة المستوي القاطع لـ $(\Sigma)$

هي $y=a$ مع $1\ge a\ge 0$

مساحة المقطع الناتج من تقاطع $(\Sigma)$

مع المستوي $y=a$

هي $\pi r^2$ مع $r^2=1-a$ أي $\pi(1-a)$

$$V=\int_0^1\pi(1-a)\,da=\left[\pi\left(a-\frac{a^2}{2}\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

طريقة (2) ، $V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1(1-y)\,dy=\frac{\pi}{2}$

## تطبيق 38 حساب حجم مجسم دوراني

$f$ دالة معرفة على $]0\ ,+\infty[$ بـ $f(x)=x+\frac{Ln\,x}{x}$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

1) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة $I$ حيث $I=\int_1^e Ln\,x\,dx$

2) $H$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $H(x)=\frac{1}{x}(Ln\,x)^2-\frac{2}{x}Ln\,x-\frac{2}{x}$

بين أن $H$ دالة أصلية لـ $h$ حيث $h(x)=\frac{(Ln\,x)^2}{x^2}$

3) نعتبر في المعلم المتعامد و المتجانس للفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المجسم $S$ الذي نحصل عليه بتدوير حول $(o,\vec{i})$ حيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\gamma)$ و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=1$ و $x=e$ و $(x'x)$ احسب حجم $(S)$ و ليكن $V$.

**✓الحل**

1) $I=\left[x\,Ln\,x-x\right]_1^e=(e-e)-(-1)=1$

2) $H'(x)=\frac{1}{x^2}(Ln\,x)^2-\frac{2}{2x}Ln\,x+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^2}Ln\,x-\frac{2}{2x}=\frac{1}{x^2}(Ln\,x)^2=h(x)$

و منه الدالة $H$ اصلية للدالة $h$

3) $V=\pi\int_1^e (f(x))^2\,dx=\pi\int_1^e\left[x^2+\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)^2+2\,Ln\,x\right]dx$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e+\pi\left[H(x)\right]_1^e+2\pi=\pi\left[\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{-1}{e}-\frac{2}{e}\frac{-2}{e}\right)+2\right]$$

$=\pi\left[\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right]$ ( وحدة الحجم )

$$V=\pi\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right)(2\,cm)^3=8\pi\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right)cm^3$$

## تطبيق 39 حساب حجم جسم دوراني

$(\gamma)$ قوس لمنحنى ممثل على $[\alpha\ ,\ \beta]$ لدالة من الشكل $f(x)=\sqrt{p(x)}$
حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية موجب تماما على $[\alpha\ ,\beta]$ .
إن تدوير $(\gamma)$ حول $(ox)$ يولد مجسما دورانيا نريد تعيين حجمه.
لتكن $B_1$ و $B_2$ مساحتي قاعدتي هذا المجسم و $B_3$ مساحة مقطع مجسم بالمستوي العمودي على $(xx')$ و يبعد بنفس المسافة عن مستوي القاعدتين
و ليكن $h=\beta-\alpha$

1) بين ان $V=\frac{h}{6}(B_1+B_2+4B_3)$

2) إرتفاع خزان ماء هو $48\,m$ نصفي قطري قاعدتيه هما $R_1$ و $R_2$
نعتبر إن حجمه هو حجم مجسم دوراني المولد بتدوير حول $(xx')$ الحيز المحدد بالمنحني $(\gamma)$ الذي معادلته $y=12\sqrt{1+\frac{x^2}{24^2}}$ و المستقيمات التي معادلتها $x=-36$ و $x=12$ و $(xx')$ احسب حجم هذا المجسم .

**الحل :**

1) $V=\pi\int_\alpha^\beta (f(x))^2\,dx$





$$V=\pi\int_\alpha^\beta p(x)dx=\pi\int_\alpha^\beta\left(ax^2+bx+c\right)dx=\pi\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_\alpha^\beta$$

$$=\left[\frac{1}{3}a\beta^3+\frac{1}{2}b\beta^2+c\beta-\frac{1}{3}a\alpha^3-\frac{1}{2}b\alpha^2-c\alpha\right]\pi$$

$$=\left[\frac{1}{3}a\left(\beta^3-\alpha^3\right)+\frac{1}{2}b\left(\beta^2-\alpha^2\right)+c\left(\beta-\alpha\right)\right]\pi$$

$$=(\beta-\alpha)\left[\frac{a}{3}\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)+\frac{b}{2}(\alpha+\beta)+c\right]\pi$$

$$=\pi\left(\frac{\beta-\alpha}{6}\right)\left[2a\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)+3b(\alpha+\beta)+6c\right]$$

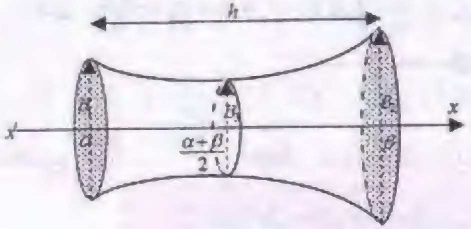
$$=\frac{h}{6}\left[2a\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)+3b(\alpha+\beta)+6c\right]\pi$$

و لدينا $B_2=\left(a\beta^2+b\beta+c\right)\pi$ و $B_1=\pi\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)$

$$B_3=\left[a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+b\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+c\right]\pi$$

$$B_1+B_2+4B_3=2a\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)+3b(\alpha+\beta)+6c$$

إذن $V=\frac{h}{6}\left(B_1+B_2+4B_3\right)$




2) $\beta=12$ و $\alpha=-36$

و $\frac{\alpha+\beta}{2}=-12$

$B_2=\pi(180)$ و $B_1=\pi\times 468$

و $B_3=180\pi$ و $h=48$

إذن $V=\frac{48}{6}\left(4\times180\pi+180\pi+468\pi\right)=8\pi\left(4\times180+180+468\right)=10944\pi$

## تطبيق 40 حساب التكامل بتبديل المتغير

نريد حساب التكامل $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

1) اثبت أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ يكون $\sin^2(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$

2) باستعمال تبديل المتغير احسب $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

✓الحل :

1) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

إذن $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

2) بوضع $x = \cos t$ يكون $dx = -\sin t \, dt$

لما $x = 0$ فإن $t = \dfrac{\pi}{2}$ و لما $x = \dfrac{1}{2}$ فإن $t = \dfrac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sqrt{1-\cos^2(t)}\sin t \, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \sqrt{\sin^2(t)}\, dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \left|\sin t\right| dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)\, dt = -\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

إذن $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

## تطبيق 41 دراسة تقارب المتتاليات المعرفة بواسطة التكامل

1) من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نضع $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx$

أ) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة العدد $I_1$

ب) بين انه من اجل كل $n \geq 1$ يكون $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

جـ) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - I_n$

2) نعتبر المتتالية الحقيقية $(a_n)$ المعرفة بـ $a_1 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $a_{n+1} = a_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم $a_n = \dfrac{1}{e} + (-1)^n I_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$







✓الحل :

1) أ) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)\, e^{-x}\, dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = 1-x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ منه نجد $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$I_1 = \int_0^1 u(x)\, v'(x)\, dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\, v(x)\, dx$$

$$= \left[-(1-x)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\, dx$$

$$= \left[(x-1)e^{-x} + e^{-x}\right]_0^1 = \left[x e^{-x}\right]_0^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ب) من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0,1]$ لدينا $0 \leq 1-x \leq 1$ منه $0 \leq (1-x)^n \leq 1$ و بضرب طرفي للتباينة في $e^{-x}$ نجد $0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx \leq \int_0^1 e^{-x}\, dx$ بالضرب في $\dfrac{1}{n!}$ نجد

$0 \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\, dx$ اي $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx$

$$\int_0^1 e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{e}\right) = 0$ وحسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

جـ) $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx$

بوضع $\begin{cases} u'(x) = (1-x)^n \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ نجد $\begin{cases} u(x) = \dfrac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 u'(x)v(x)\, dx = \frac{1}{n!}\left(\left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}e^{-x}\right]_0^1\right) - \frac{1}{n!}\int_0^1 u(x)v'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\right)e^0 - \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{+1}{n+1}(1-x)^{n+1}e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - I_{n+1}$$

إذن $I_{n+1} = -I_n + \frac{1}{(n+1)!}$

2) $a_1 = 0$ و $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

إثبات أن $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

نسمي $p_n$ الخاصية " $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ "

من اجل $n=1$ لدينا $a_1 = \frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$ منه $p_1$ صحيحة.

نفرض أن $p_n$ صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 1$ اي $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ و

نبرهن أن $p_{n+1}$ صحيحة اي $a_{n+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$ .

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1}\left[-I_n + \frac{1}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

منه $p_{n+1}$ صحيحية و بالتالي $p_n$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

ب) بما أن $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{e}$



## تطبيق 42 دراسة تقارب متتالية

$f$ دالة معرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x} + Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1) ادرس تغيرات $f$ على $I = ]0\,,+\infty[$

2) $\alpha$ عدد حقيقي موجب تماما، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_1^{\alpha} Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ ثم $\int_1^{\alpha} f(t)\,dt$ .

3) $k$ عدد طبيعي غير معدوم.

أ) بين أن $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$





ب) برهن أن $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{k} - f(k)$ ثم استنتج

$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$

4) أ) تحقق أن من اجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{0,1\}$ يكون

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ ...(I)

ب) نضع من اجل كل $n \geq 1$ ،

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

باستعمال المساواة (I) اعط عبارة مختصرة لـ $S_n$ ثم بين أن المتتالية $(S_n)$ متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

جـ) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون:

$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$ ثم استنتج

$\lim_{n\to+\infty}\left[f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)\right]$

5) نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ بـ $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

أ) تحقق باستعمال السؤال 3 فرع ب أن:

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - Ln(2) - Ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

ب) استنتج أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها .

### الحل :

1) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} + Ln(x) - Ln(x+1)$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{x}\left(1 + x\,Ln(x)\right) - Ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x-1+x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

من اجل كل $x$ من $I$ لدينا $f'(x) < 0$

و منه $f$ متناقصة تماما على $I$.

2) $I_\alpha = \int_1^\alpha Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ |
| $f(x)$ | | $+\infty \searrow 0$ |

نضع $\begin{cases} u(x) = Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x)=1 \end{cases}$

نجد $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x(x+1)} \\ v(x)=x \end{cases}$



$$I_\alpha = \int_1^\alpha u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{1}{x+1}dx$$
$$= \left[x\,Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - Ln(x+1)\right]_1^\alpha$$
$$= \alpha\,Ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - Ln(\alpha+1) + 2\,Ln(2)$$
$$\int_1^\alpha f(t)dt = \int_1^\alpha \frac{1}{t}dt + \int_1^\alpha Ln\left(\frac{t}{1+t}\right)dt = \int_1^\alpha \frac{1}{t}dt + I_\alpha$$
$$= Ln(\alpha) + I_\alpha = (\alpha+1)Ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) + 2\,Ln(2)$$

3) من اجل كل $x$ من $[k\ ,\ k+1]$ يكون $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{k+1}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$\frac{1}{k}(k+1-k) \ge \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \ge \frac{1}{k+1}(k+1-k)$ اي $\frac{1}{k} \ge \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \ge \frac{1}{k+1}$

ب) لدينا $\frac{1}{k} - f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - Ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = [Ln(x)]_k^{k+1} = Ln(k+1) - Ln(k) = -Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

منه نستنتج $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{k} - f(k)$

- لدينا $\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \le \frac{1}{k}$

و عليه نجد $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{k} - f(k) \le \frac{1}{k}$ بإضافة $-\frac{1}{k}$ إلى أطراف المتباينة الأخيرة نجد

$-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \le -f(k) \le 0$ بالضرب في $(-1)$

نجد $0 \le f(k) \le \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ اي $0 \le f(k) \le \frac{1}{k(k+1)}$





4) أ) من اجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{0\ ,\ 1\}$ لدينا $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

ب) $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + .... + \frac{1}{2n(2n+1)}$

$$S_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + .... + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = 0$$

منه $(S_n)$ متتالية متقاربة نحو العدد 0.

ج) لدينا $\frac{1}{n(n+1)} \ge f(n) \ge 0$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \ge f(n+1) \ge 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2n(2n+1)} \ge f(2n) \ge 0$$

بجمع أطراف التباينات طرفا لطرف نجد $S_n \ge f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) \ge 0$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ و حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n\to+\infty} f(n) + f(n+1) + .... + f(2n) = 0$

5) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + .... + \frac{1}{2n}$

أ) $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} - f(n)$

$$\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n+1} - f(n+1)$$
$$\vdots$$
$$\int_{2n}^{2n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2n} - f(2n)$$

بجمع أطراف التباينات طرفا لطرف نجد

$$\int_n^{2n+1}\frac{1}{x}dx = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + .... + \frac{1}{2n}\right) - (f(n) + f(n+1) + ... + f(2n))$$
$$\int_n^{2n+1}\frac{1}{x}dx = U_n - (f(n) + f(n+1) + ... + f(2n))$$

منه نجد $f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) = U_n - \int_n^{2n+1}\frac{1}{x}dx$

لكن $\int_n^{2n+1}\frac{1}{x}dx = [Ln\,x]_n^{2n+1} = Ln(2n+1) - Ln(n) = Ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

$$= Ln(2) + Ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

إذن $f(n)+f(n+1)+...+f(2n)=U_n-Ln(2)-Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

ب) لدينا من السؤال 5) أ)

$$U_n=f(n)+f(n+1)+...+f(2n)+\left[Ln(2)+Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

و $\lim_{n\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=0$ و $\lim_{n\to+\infty} f(x)+f(n+1)+...+f(n+1)=0$

إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n=Ln(2)$ ،

و هذا يعني أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة نحو $Ln(2)$ .

## تطبيق 43 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

نضع $I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}\,dx$ .

1) احسب $I_0$ باستعمال التكامل بالتجزئة.

2) برهن أن للمتتالية $(I_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) نضع $S_n=\sum_{k=0}^{n} I_k$ ، احسب $S_n$ ثم عين نهاية للمتتالية $(S_n)$ .

### الحل

1) $I_0=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}\,dx$

نضع $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\cos\frac{x}{2}\end{cases}$

نجد $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=2\sin\frac{x}{2}\end{cases}$

$$I_0=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\left[u(x)v(x)\right]_{\pi}^{4n\pi}-\int_{\pi}^{4n\pi} u'(x)v(x)\,dx\right)$$

$$=\left[x\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} 2\sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$=\left[x\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}+\left[2\cos\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}=4-\pi$$





2) $I_n=\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}\,dx$ منه $I_n=\frac{1}{2^n}I_0$

$$I_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}I_0=\frac{1}{2^n}\times I_0\times\frac{1}{2}=I_n\times\frac{1}{2}$$

منه $(I_n)$ متتالية هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$

3)

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} I_k=I_0+I_1+...+I_n=I_0\times\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=(4-\pi)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$=2(4-\pi)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=2(4-\pi)$$

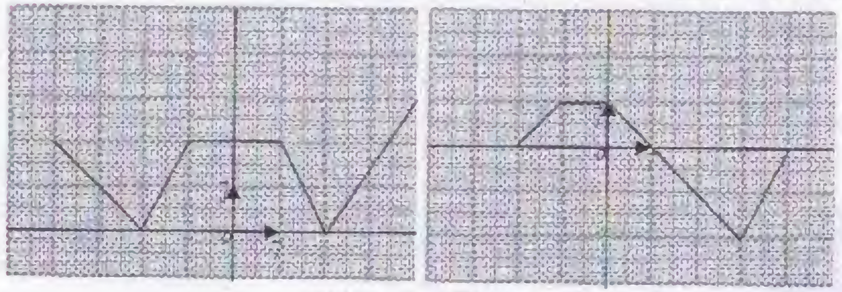
# تمارين و مسائل

**1** - مثل الدوال الدرجية $f$ المعطاة ثم احسب التكامل $I\ (f)$ في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $\begin{cases} f(x) = 5 , & 1 \geq x \geq -3 \\ f(x) = -4 , & 3 > x \geq 1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x) = -\sqrt{2} , & \sqrt{5} \geq x \geq -\sqrt{5} \\ f(x) = -2 , & 2\sqrt{5} > x \geq \sqrt{5} \end{cases}$

**2** - كل شكل من الأشكال التالية يمثل التمثيل البياني لدالة درجية $f$ ، عين عبارة $f(x)$ على كل مجال ثم احسب التكامل $I\ (f)$ على مجال تعريف الدالة $f$ .

**3** - في كل شكل من الأشكال التالية، الدالة التالفية بالقطع $f$ ممثلة بالمنحنى المعطى احسب باستعمال المساحات التكامل $I\ (f)$ على مجال تعريف $f$ .



**4** - $f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ و $g(x) = 5 - x$

أ) ارسم $(C_f)$ و $(C_g)$ على المجال $[-5, 7]$ في معلم متعامد ومتجانس.





ب) باستعمال حساب المساحات، احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^4 g(x)\,dx \ ، \ \int_0^7 g(x)\,dx \ ، \ \int_{-4}^0 f(x)\,dx \ ، \ \int_0^7 f(x)\,dx$$

**5** - 1) نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + 1$ على المجال $[-2, 2]$ بين أن التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[-2, 2]$ في معلم متعامد ومتجانس هو نصف دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) باستعمال الدستور الذي يعطي مساحة قرص، احسب التكاملات التالية:

$$\int_{-2}^2 f(t)\,dt \ ، \ \int_0^2 f(t)\,dt \ ، \ \int_{-2}^0 f(t)\,dt$$

**6** - لتكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين على المجال $[0, 5]$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 , & 1 \geq x \geq 0 \\ f(x) = -x + 2 , & 2 \geq x > 1 \\ f(x) = x - 4 , & 5 \geq x > 2 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} g(x) = -x + 3 , & 1 \geq x \geq 0 \\ g(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2} , & 5 \geq x \geq 1 \end{cases}$$

1) احسب تكامل كل من $f$ و $g$ على المجال $[0, 5]$

2) استنتج التكاملين على $[0, 5]$ للدالتين $f + 2g$ و $-2f + g$

**7** - في معلم متعامد و متجانس ارسم على المجال $[0, 1]$ التمثيل البياني لكل من الدالتين $x \to x^2$ ، $x \to \sqrt{x}$

- إذا علمت أن $\int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}$ احسب $\int_0^1 x^2\, dx$ باستعمال التناظر المحوري.

**8** - إذا علمت أن $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$ احسب باستعمال التناظرات المعروفة للمنحنى ذي المعادلة $y = \sin x$ التكاملات التالية:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \ ، \ J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx \ ، \ K = \int_0^{2\pi} \sin x\, dx \ ، \ H = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x\, dx$$

**9** - من أجل كل قضية من القضايا التالية، بين إن كانت صحيحة أو خاطئة، وفي حالة هذه الأخيرة بين بمثال يبين ذلك.

لنعتبر الدالة $f$ المعرفة والمستمرة على $\mathbb{R}$

1) $\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx=\int_1^5 f(x)\,dx$

2) إذا كان $f \ge 0$ على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي $t$ يكون $\int_0^t f(x)\,dx \ge 0$

3) إذا كان $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجب فإن $f$ موجبة على $[0,2]$



**10** - نعتبر دالتين $f$ و $g$ مستمرتين على المجال $[2,4]$ و بحيث :

$-1 \le g(x) \le 5$ و $-3 \le f(x) \le 4$

1) اعط حصرا للدالة $f+g$ ثم $3f-g$ على هذا المجال.

2) اعط حصرا لكل من التكاملين التاليين :

$\int_2^4 (f(x)+g(x))\,dx$ ، $\int_2^4 (3f(x)-g(x))\,dx$

**11** - بين المتباينات التالية :

أ) $\int_{\frac13}^1 Ln\,t\,dt \ge -\frac{2}{3}Ln\,3$ ، ب) $\frac13 \le \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx \le \frac12$ ، جـ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^2)\,dt \le 2$

**12** - احسب حجم المجسم المولد بالدوران حول المحور $(xx')$ للمساحة المحصورة بين المنحنيين ذوي المعادلات $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $y=\frac{1}{x}$ و $1 \le x \le e$ .

**13** - احسب حجم المجسم المولد بتدوير حول $(xx')$ للمساحة المحصورة بين المنحنيين ذوي المعادلة $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ و $1 \ge x \ge 0$ .

**14** - من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^2 x\,dx$

بين $0 \le I_n \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$ ما هي نهاية المتتالية $(I_n)$ ؟

**15** - من أجل كل عدد حقيقي $x \rangle 0$ بين أن $\frac{x}{x+1} \le Ln(x+1) \le x$

يمكنك استعمال حصر الدالة $f$ المعرفة بـ $f(t)=\frac{1}{1+t}$ على المجال $[0,x]$





**16** - أ) باستعمال نظرية حصر القيمة المتوسطة للدالة $x \to \cos x$ على المجال $[x,y]$

بين أن $|\sin x-\sin y| \le |x-y|$

ب) بطريقة مماثلة بين أن $|\cos x-\cos y| \le |x-y|$

**17** - 1) باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة مرتين احسب $I=\int_0^3 x^2 e^{-2x}\,dx$ .

2) لتكن $f$ دالة معرفة على $[0,3]$ بالعبارة $f(x)=xe^{-x}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس، طول الوحدة $4\,cm$ . وليكن $S$ المجسم المحصل عليه بالتدوير حول $(xx')$ للمنحنى ذو المعادلة $y=f(x)$ . عبر عن $V$ بدلالة $I$ ثم حدد قيمة مقربة لـ $V$ حجم هذا المجسم إلى $1\,cm^3$

**18** - نريد حصر التكامل $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{1+e^x}\,dx$

1) لتكن $g$ دالة معرفة على $[0,1]$ بـ $g(x)=Ln(1+e^x)$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، $A$ نقطة من $(\gamma)$ فاصلتها معدومة و $B$ نقطة من $(\gamma)$ فاصلتها 1

أ) ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم عين معادلة المماس لـ $(\gamma)$ في النقطة $A$

ب) $p$ نقطة تقاطع المماس في $A$ مع القطعة $[IB]$ حيث $I(1,0)$

احسب مساحة كل من الشكلين $OIPA$ و $OIBA$

2) نقبل أن المنحنى $(\gamma)$ محصور بين القطعتين $[AP]$ و $[AB]$، بين أن

$$Ln\,2+\frac14 \le \int_0^1 g(x)\,dx \le Ln\sqrt{2(1+e)}$$

3) باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن $\int_0^1 g(x)\,dx$ بدلالة $J$ ثم استنتج حصرا لـ $J$

**19** - عين الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال المعطى باستعمال الدساتير الشهيرة :

1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ و $I=\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=\frac{3}{2x-6}$ و $I=]3,+\infty[$

3) $f(x)=\frac{2x^2}{x^3+1}$ و $I=]-1,+\infty[$ ، 4) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

5) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$ و $I=]0,+\infty[$ ، 6) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{-3}{x}}$ و $I=]0,+\infty[$

7) $f(x)=-5e^{-4x+3}$ و $I=\mathbb{R}$ ، 8) $f(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$ و $I=\mathbb{R}$

9) $f(x)=\cos x - x\sin x$ و $I=\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ و $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

11) $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ و $I=]0,+\infty[$

12) $f(x)=\tan x+x\tan^3 x$ و $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$



**20** - $u$ و $v$ دالتان معرفتان على $I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ بـ $u(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ و $v(x)=\frac{1}{\cos^4 x}$

1) تحقق انه من أجل كل $x$ من $I$ يكون $u'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$

2) أوجد دالة أصلية لـ $v$ على $I$ التي تنعدم عند الصفر.

(مشتق الدالة $x\to \tan(x)$ هي الدالة $x\to 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$)

**21** - في كل ما يلي $f$ دالة ناطقة معرفة على مجال معطى بين ان $f(x)$ تكتب على الشكل المعطى، ثم استنتج دالة أصلية للدالة $f$ :

1) $f(x)=\frac{x+2}{x+3}$ ، $f(x)=a+\frac{b}{x+3}$ ، $I=]-3,+\infty[$

2) $f(x)=\frac{3x+5}{4x+2}$ ، $f(x)=a+\frac{b}{4x+2}$ ، $I=]-\frac{1}{2},+\infty[$

3) $f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x+2}$ ، $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ ، $I=]-2,+\infty[$

4) $f(x)=\frac{5x^3+4x^2+2x+1}{(x+2)^2}$ ، $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+2)^2}$ ، $I=]-2,+\infty[$

**22** . $f$ و $g$ و $h$ دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin x+\cos^3 x$

$g(x)=\sin^4 x\cos^5 x$ و $h(x)=\cos^2 x\sin^4 x$ عين الدوال الأصلية للدوال المعطاة.

**23** . $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^4 x$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\sin(2x)$

2- استنتج الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**24** . $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{3x}\sin x$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$





2- أوجد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

**25** - نضع $F(x)=\int_0^x \frac{-3}{\sqrt{t^2+5}}\,dt$

1) احسب $F(0)$ ، ثم احسب $F'(x)$

2- ادرس تغيرات الدالة $F$ ثم شكل جدول تغيراتها وعين إشارة $F(x)$

**26** - نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)\,dx}{1+2\sin x}$

احسب $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ و $I+J$ ثم استنتج قيمة $I$ .

**27** - $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=(2-x)e^x$

بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(t)\,dt$

**28** - نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}$

احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج $I$ و $J$

**29** - نضع $f(t)=\int_0^t\frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dt$ مع $t\in[0,1[$

احسب التكامل $f(t)$ ثم عين نهاية $f(t)$ لما $t$ يؤول إلى 1 بقيم صغرى.

**30** - لتكن $f$ دالة معرفة بالعبارة $f(x)=x^2+2x$

احسب التكاملين $I=\int_{-1}^{2}|f(x)|\,dx$ و $J=\int_{-1}^{2}\left(x^2+2|x|\right)dx$

**31** - احسب قيمة $I$ باستعمال التكامل بالتجزئة في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I=\int_1^2 t\ln t\,dt$ ، 2) $I=\int_0^{\pi}(t-2)\cos t\,dt$

3) $I=\int_0^1 (3t+1)e^{-t}\,dt$ ، 4) $I=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$

5) $I=\int_0^1 (2t^2-t+1)e^{t}\,dt$ ، 6) $I=\int_0^1 (3t+1)e^{t}\,dt$

**32** - لتكن التكاملات $K$ ، $I$ ، $J$ بحيث:

$$K=\int_0^\pi e^x\cos(2x)\,dx \quad ، \quad I=\int_0^\pi e^x\cos^2 x\,dx \quad و \quad J=\int_0^\pi e^x\sin^2 x\,dx$$

1) باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين بين أن $K=\frac{e^\pi-1}{5}$

2) احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج $I$ و $J$

3) بالتعبير عن $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ بدلالة $\cos(2x)$ أوجد باستعمال $K$ قيمة $I$ و $J$

**33** - $f$ دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x+\sqrt{x^2-1})$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة $I=\int_{\sqrt2}^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

2) نضع $J=\int_{\sqrt2}^2\sqrt{x^2-1}\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن $I+J$ بدلالة $J$ ثم استنتج قيمة $J$



**34** - من أجل كل $x>0$ نعتبر التكاملين:

$$I_n=\int_0^x\sin^{2n}t\,dt \quad و \quad J_n=\int_0^x(\sin^{2n}t-\cos^2 t)\,dt \quad \text{مع } n\in IN$$

1) أوجد علاقة بين $J_n$ ، $I_n$ و $I_{n+1}$

2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $J_n$ بدلالة $I_{n+1}$

ثم استنتج علاقة تربط بين $I_{n+1}$ و $I_n$

3) احسب $I_0$ ثم بين أنه يمكن حساب $I_1$ و $J_0$

**35** - ليكن المنحنى $(\gamma)$ ذو المعادلة $y=\sin x$ مع $0\le x\le\pi$ و $(\Gamma)$ المنحنى ذو المعادلة $y=ax^2+bx+c$

1) ارسم $(\gamma)$ في معلم متعامد ومتجانس. نرمز بـ $A$ إلى النقطة من $(\gamma)$ بحيث المماس عندها يوازي $(x'x)$.

2) عين الأعداد $a$ ، $b$ ، $c$ بحيث $(\Gamma)$ يمر من المبدأ $O$ ويقبل $A$ كذروة له، ثم ارسم $(\Gamma)$ على نفس المجال.





3) نقبل أن القطع المكافئ $(\Gamma)$ يبقى فوق $(\gamma)$ على المجال $[0,\pi]$ ، احسب مساحة الحيز المحصور بين هاذين المنحنيين.

**36** - $f$ دالة معرفة على $IR$ بالعبارة $f(x)=1+x-xe^{-x^2+1}$ و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ طول الوحدة $2cm$.

1) تحقق أن $(\gamma)$ يقبل النقطة $I(1,0)$ كمركز تناظر له.

2) برهن أن $(\gamma)$ يقبل مستقيم مقارب $(d)$ عند $(+\infty)$، ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى $(\gamma)$.

3) من أجل كل عدد حقيقي $\lambda\ge0$ ، $S(\lambda)$ هي المساحة بـ $cm^2$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\gamma)$ و $(d)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$.

أ) عبر عن $S(\lambda)$ بدلالة $\lambda$.

ب) ما هي النهاية $S$ للمساحة $S(\lambda)$ لما $\lambda$ يؤول إلى $(+\infty)$؟

ج) عين العدد الحقيقي $\lambda_0$ بحيث لما $\lambda\ge\lambda_0$ يكون $|S-S(\lambda)|\le10^{-2}$.

**37** - في معلم متعامد ومتجانس نعتبر القطع المكافئ $(P)$ ذو المعادلة $y=16-x^2$ المرسوم على المجال $[-4,4]$. بتدوير $P$ حول $(oy)$ نحصل على مجسم دوراني $(\Sigma)$.

1) ما هي طبيعة مقطع من $(\Sigma)$ بمستو عمودي على $(oy)$؟

2) عبر بدلالة $y$ حيث $0\le y\le16$ عن مساحة هذا المقطع، ثم احسب مساحة $(\Sigma)$.

**38** - $(U_n)$ متتالية معرفة على $IN^*$ بـ $U_n=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}\,dt$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0,2]$ حيث $f(t)=\frac{2t+3}{t+2}$

ب) استنتج أن $\frac32 n\left(e^{\frac2n}-1\right)\le U_n\le\frac74 n\left(e^{\frac2n}-1\right)$

ج) بين أنه إذا كانت $(U_n)$ تقبل نهاية $\ell$ فإن $3\le\ell\le\frac72$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $t$ من $[0,2]$ $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$

ثم استنتج قيمة $I$ حيث $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}\,dt$

ب) بين أنه من أجل كل $t\in[0,2]$ يكون $1\le e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac2n}$ ثم استنتج أن $I\le U_n\le e^{\frac2n}\times I$ ثم تحقق أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة ثم عين نهايتها $\ell$.

**39** - من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع $I_n = \int_1^e (Ln\,x)^n\,dx$

1) ا) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $[1, e]$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $(Ln\,x)^n - (Ln\,x)^{n+1} \geq 0$ ثم استنتج ان المتتالية $(I_n)$ متناقصة

ب) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون $I_n \geq 0$ ثم استنتج ان المتتالية $(I_n)$ متقاربة

2) ا) احسب $I_1$

ب) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$ ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $I_2$ ، $I_3$ و $I_4$

3) ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون ، $(n+1)\,I_n \leq e$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(I_n)$

ب) ما هي قيمة $n\,I_n + (I_n + I_{n+1})$ ؟ ثم استنتج نهاية المتتالية $(n\,I_n)$ .

**40** - نريد حصر التكامل $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ بواسطة طريقة المستطيلات

1) ارسم التمثيل البياني للدالة $x \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ على المجال $[0, 3]$

2) نجزئ المجال $[0, 3]$ إلى $n$ مجال كل منها له نفس الطول حيث $n \geq 1$

ا) بين ان مجموع مساحات المستطيلات الكبرى يكتب على الشكل ، $U_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\times 3\right)$

- بين ان مجموع مساحات المستطيلات الصغرى يكتب على الشكل:

$V_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\times 3\right)$ حيث $(U_n)$ و $(V_n)$ تعرف متتاليتين من اجل $n \geq 1$

ب) بين ان $U_n - V_n = \frac{3}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3^2+1}}\right)$

جـ) بين ان $U_n - V_n < \frac{7}{10\,n}$

د) استنتج قيمة $n_0$ بحيث من اجل كل $n \geq n_0$ يكون $0 < U_n - V_n < 10^{-2}$ وهذا باستعمال السؤال (جـ)

و) أوجد الحصر للتكامل $I$ الموافق للقيمة $n_0$

**41** - من اجل كل $x$ من $I = ]0, +\infty[$ نضع $F(x) = \int_0^x Ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة $F$





2) ليكن $a$ عدد حقيقي موجب تماما. تحقق انه من اجل كل $t$ من $[1, 1+a]$ يكون $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ واستنتج ان $\frac{a}{a+1} \leq Ln(a+1) \leq a$

3) استنتج من السؤال (2) ان $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$

ثم $\frac{1}{2}Ln(2) - \frac{1}{2}Ln\left(1+e^{-2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

4) نقبل انه لما $x$ يؤول إلى $(+\infty)$ فإن نهاية $F(x)$ هي عدد حقيقي نرمز له بـ $\ell$ بين ان $\frac{1}{2}Ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

5) من اجل كل عدد طبيعي $n$ نضع $U_n = \int_n^{n+1} Ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$

برهن ان $0 \leq U_n \leq Ln\left(1+e^{-2n}\right)$ ثم استنتج ان $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها

6) من اجل كل عدد طبيعي $n$ نضع $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

- عبر عن $S_n$ بدلالة $n$ و $F$ ثم بين أن المتتالية $(S_n)$ متقاربة ثم عين نهايتها .

**42** - من اجل كل عدد طبيعي $n$ نضع $f_n(x) = \frac{x^n}{x^2+x+1}$ و $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$

1) بين أن المتتالية $(I_n)$ معرفة جيدا ثم ادرس اتجاه تغير $(I_n)$

2) باستعمال الحصر على المجال $[0, 1]$ للدالتين $U : x \to 1+x+x^2$ و $x \to \frac{1}{x}$

بين ان $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج تقارب المتتالية $(I_n)$ .

**43** - نعرف من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ التكامل $I_n$ بـ $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$

1) احسب $I_1$ ثم تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون ، $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$

2) باستعمال التكامل بالتجزئة بين انه من اجل كل $n \geq 1$ يكون ، $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

3) برهن بالتراجع ان $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

4) أ) نضع من اجل كل $n \geq 1$ ، $U_n = \frac{2^n}{n!}$ احسب $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ثم بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $0 \leq U_n \leq U_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

5) أ) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$ ثم نهاية $(I_n)$

ب) تحقق ان $e^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+ \dots +\frac{2^n}{n!}\right)$

**44** - نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $I=[0,1]$ بـ $f(x)=-x^2+2x$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات $f$ ثم ارسم منحناها البياني على المجال $I$ في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة هو $10\,cm$ ) وحدد المماس للمنحنى عند كل من النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 1.

2) ارسم المنحنى الممثل للدالة $g$ ثم حدد المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

3) بين أن تكامل $f$ و تكامل $g$ على المجال $I$ متساويين.

4) بين أن المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال $[0,1]$ تكافئ $(x-1)(x^2-3x+1)=0$

5) استنتج أن المنحنيين لهما نقطة مشتركة فاصلتها $\alpha$ حيث $0 < \alpha < 1$

ب) احسب $\alpha$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين

6) احسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين.

**45** - لتكن $f_0$ دالة معرفة على $I=[0,+\infty[$ بـ $f_0(x)=e^{-x}$ ومن اجل كل عدد حقيقي موجب تماما $\alpha$ ، $f_\alpha$ دالة معرفة كما يلي:

$f_\alpha(0)=0$ و $f_\alpha(x)=x^\alpha e^{-x}$ من اجل $x > 0$

$(\gamma_\alpha)$ المنحنى البياني للدالة $f_\alpha$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ طول الوحدة $(4\,cm)$

1) ادرس تغيرات الدالتين $f_0$ و $f_1$ وارسم $(\gamma_0)$ ، $(\gamma_1)$ في نفس المعلم.

2) نفرض أن $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$ ، ادرس استمرار وقابلية اشتقاق $f_\alpha$ عند العدد $x_0=0$

3) ادرس تغيرات $f_\alpha$

4) ليكن $\alpha > 0$ ، ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma_0)$ و $(\gamma_\alpha)$ على $]0,+\infty[$

5) ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين بحيث $0 < \alpha < \beta$ ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma_\alpha)$ بالنسبة إلى $(\gamma_\beta)$ على $]0,+\infty[$ .

6) برهن أن جميع المنحنيات $(\gamma_\alpha)$ تمر من نقطة ثابتة عينها.





7) ارسم $(\gamma_e)$ و $\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right)$ في نفس المعلم السابق.

8) نفرض أن $\alpha > 0$ و لتكن $g_\alpha$ اقتصار الدالة $f_\alpha$ على المجال $]\alpha,+\infty[$ .

برهن أن $g_\alpha$ تقبل دالة عكسية $g_\alpha^{-1}$ عين جدول تغيراتها، ثم ارسم بيانها (خذ $\alpha=\frac{1}{2}$ ).

9) نضع $\alpha=n$ حيث $n$ عدد طبيعي ولتكن $h_n$ دالة معرفة على $I$ كما يلي:

$$h_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$$

أ) احسب $h_0(x)$ و $h_1(x)$ من اجل كل $x$ من $]0,+\infty[$

ب) بين انه من اجل كل $x$ من $I$ يكون $h_n(x)=-x^n e^{-x}+n\,h_{n-1}(x)$

جـ) عين الأعداد الحقيقية $a_0$ , $a_1$ , ....... , $a_n$ بحيث تكون الدالة $K_n$ المعرفة بـ: $K_n(x)=e^{-x}(a_n x^n+\dots\dots+a_1x+a_0)$ أصلية للدالة $f_n$ على $]0,+\infty[$.

د) استنتج عبارة $h_n(x)$ بدلالة $x$ و $n$ .

هـ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $\lim_{x\to+\infty} h_n(x)=n!$

**46** - $f_\alpha$ دالة معرفة كما يلي $\begin{cases} f_\alpha(x)=(x-\alpha)\left[1-Ln(x-\alpha)\right] & , x > \alpha \\ f_\alpha(\alpha)=0 \end{cases}$

وليكن $(\gamma_\alpha)$ التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق $f_\alpha$ عند $\alpha=x_0$ .

2) ادرس حسب قيم $\alpha$ تغيرات $f_\alpha$ ثم ادرس وجود المستقيمات المقاربة لـ $(\gamma_\alpha)$ ارسم $(\gamma_0)$ .

3) برهن أن جميع المنحنيات $(\gamma_\alpha)$ هي صورة $(\gamma_0)$ بواسطة انسحاب يطلب تعيينه. ثم ارسم $(\gamma_1)$ و $(\gamma_{-1})$ في نفس المعلم.

4) احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\gamma_0)$ والمستقيم ذا المعادلة $y=2$ والمستقيمين ذوي المعادلتين $x=\lambda$ و $x=e$ حيث $\lambda < e$ ثم احسب $\lim_{\lambda\to 0} S(\lambda)$

**47** - I) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-Ln\left(x^2+1\right)$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم حدد النهاية عند $(+\infty)$ واستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]1,+\infty[$ وتحقق أن $\frac{7}{4} < \alpha < 2$

2) $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدالة $g$ في معلم متعامد ومتجانس

أ) اكتب معادلة المماس $(T)$ لـ $(\Gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

ب) $(T)$ يقطع المحور $(ox)$ في نقطة فاصلتها $x_0$ ، احسب القيمة المضبوطة لـ $x_0$ .

$V_1$ و $V_2$ هما القيمتين التقريبية بتقريب $10^{-3}$ لـ $x_0$ .

باستعمال إشارة $g(V_1)$ و $g(V_2)$ استنتج حصرا لـ $\alpha$ بتقريب $10^{-3}$

ج) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{0\}$

II) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{Ln\left(x^2+1\right)}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و $(\gamma)$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) برهن أن $f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم ادرس اتجاه تغير $f$ و احسب نهاية $f$ عند $(+\infty)$

2) تحقق انه من اجل كل $x\succ -1$ يكون $Ln\left(1+x\right)\leq x$ ثم استنتج وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى المماس عند النقطة $O$ ثم ارسم $(\gamma)$

III) $F$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

1) $r$ عدد حقيقي موجب تماما و ثابت، تحقق أن $F(r)$ و $F(-r)$ هما مساحتين لحيزين متقايسين ثم استنتج شفعية الدالة $F$ . و حدد اتجاه تغير $F$ على $[0,+\infty[$

2) استعمل وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى مماسه عند النقطة $O$ للتحقق من أن $0\leq F(1)\leq \frac{1}{2}$

3) برهن انه من اجل كل $t\geq 1$ يكون $\dfrac{Ln(t^2)}{t}\leq \dfrac{Ln(t^2+1)}{t}\leq \dfrac{Ln(2t^2)}{t}$

4) لما $x\geq 1$ احسب $\int_1^x \dfrac{Ln(t)}{t}dt$ ثم استنتج نهاية $F(x)$ و $\dfrac{F(x)}{x}$ عند $(+\infty)$

5) اعط تصور عن رسم المنحنى الممثل للدالة $F$ (خذ بعين الاعتبار $F(1)\approx 0{,}4$)







تم هذا الكتاب بعون الله تعالى

بكالوريا الجزائر
bac 15